Verschieben und Strecken von Sinus- und Cosinusfunktionen

Übungsmaterial für die Sekundarstufe II – Hessen

Mathematisches „Kochrezept“ für transformierte Sinus- und Cosinusfunktionen

Wir betrachten Funktionen in der Form

$$f(x) = a \cdot \sin\big(b(x-c)\big) + d \qquad \text{bzw.} \qquad g(x) = a \cdot \cos\big(b(x-c)\big) + d$$

mit $a \neq 0$ und $b > 0$.

a	Streckung/Stauchung in y-Richtung. $\lvert a\rvert$ ist die Amplitude. Für $a < 0$ wird der Graph zusätzlich an der x-Achse gespiegelt.
b	bestimmt die Periode: $T = \dfrac{2\pi}{b}$. Für $b > 1$ wird der Graph in x-Richtung gestaucht, für $0 < b < 1$ gestreckt.
c	Verschiebung in x-Richtung: $c > 0$ bedeutet Verschiebung nach rechts, $c < 0$ nach links.
d	Verschiebung in y-Richtung: $d > 0$ bedeutet Verschiebung nach oben, $d < 0$ nach unten.

Schritt-für-Schritt: So skizziert man einen transformierten Sinus/Cosinus

Schritt 1: Mittellinie einzeichnen: Die Mittellinie ist $y = d$. Sie gibt die vertikale Lage des Graphen an.

Schritt 2: Amplitude und Extremwerte bestimmen: Die Amplitude ist $\lvert a\rvert$. Damit gilt:

$$y_{\max} = d + |a|, \qquad y_{\min} = d - |a|.$$

Schritt 3: Periode berechnen: Die Periodenlänge ist

$$T = \frac{2\pi}{b}.$$

Der Graph wiederholt sich nach jeder Länge T.

Schritt 4: Startpunkt festlegen:

- Bei $f(x) = a\sin(b(x-c)) + d$ startet der Graph für $a > 0$ bei $x = c$ auf der Mittellinie und steigt.
- Bei $g(x) = a\cos(b(x-c)) + d$ hat der Graph für $a > 0$ bei $x = c$ ein Maximum.

Bei $a < 0$ werden Maximum und Minimum vertauscht.

Schritt 5: Schlüsselpunkte in Viertelperioden bestimmen:

Für $a > 0$ und $b > 0$ gelten:

Sinus: x	c	$c + \frac{T}{4}$	$c + \frac{T}{2}$	$c + \frac{3T}{4}$	$c + T$
$f(x)$	d	$d + a$	d	$d - a$	d

Cosinus: x	c	$c + \frac{T}{4}$	$c + \frac{T}{2}$	$c + \frac{3T}{4}$	$c + T$
$g(x)$	$d + a$	d	$d - a$	d	$d + a$

Schritt 6: Graphen zeichnen und periodisch fortsetzen: Verbinde die Schlüsselpunkte zu einer glatten Kurve und setze den Graphen nach links und rechts periodisch fort.

Beispiel

Gegeben ist

$$f(x) = 2\sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + 1.$$

- $a = 2$, $b = 2$, $c = \frac{\pi}{2}$, $d = 1$
- Mittellinie: $y = 1$
- Amplitude: 2
- Maximum: $1 + 2 = 3$, Minimum: $1 - 2 = -1$
- Periode: $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$
- Startpunkt: $\left(\frac{\pi}{2}\middle|1\right)$, steigend
- Schlüsselpunkte:

$$\left(\frac{\pi}{2}\middle|1\right), \quad \left(\frac{3\pi}{4}\middle|3\right), \quad (\pi|1), \quad \left(\frac{5\pi}{4}\middle|-1\right), \quad \left(\frac{3\pi}{2}\middle|1\right).$$

Wichtige Umformung

Häufig stehen Funktionen in der Form

$$f(x) = a\sin(bx + e) + d.$$

Dann kann man sie umschreiben:

$$bx + e = b\left(x + \frac{e}{b}\right).$$

Die Verschiebung in x-Richtung ist also

$$-\frac{e}{b}.$$

Beispiel:

$$\sin(2x - \pi) = \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Der Graph ist gegenüber $\sin(2x)$ um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts verschoben.

Außerdem gilt:

$$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Jeder Sinusgraph kann also auch als Cosinusgraph dargestellt werden und umgekehrt.

Einführung und curriculare Einordnung

Das Thema *Verschieben und Strecken von Sinus- und Cosinusfunktionen* ist im hessischen Lehrplan für die gymnasiale Oberstufe im Lernbereich *Analysis* verankert. Es gehört zum Inhaltsfeld *Funktionen und ihre Graphen* und vertieft den Umgang mit trigonometrischen Funktionen als periodischen Modellen.

Die Aufgaben fördern insbesondere folgende Kompetenzbereiche:

- **Darstellen:** Wechsel zwischen Funktionsterm, Parameterwirkung und Graph.
- **Umformen:** Bestimmung von Amplitude, Periode, Verschiebung und Phase.
- **Interpretieren:** Deutung von Parametern im Graphen und in realen Kontexten.
- **Modellieren:** Übertragung periodischer Vorgänge, z. B. Riesenrad, Tageslänge oder Gezeiten, in trigonometrische Funktionen.

Die Aufgaben sind nach den Anforderungsbereichen differenziert:

- **Niveau A:** Grundlagen, Ablesen und Bestimmen von Parametern (AB I).
- **Niveau B:** Übertragen, Skizzieren und Bestimmen von Funktionsgleichungen (AB II).
- **Niveau C:** Begründen, Modellieren und Darstellen von Zusammenhängen (AB III).

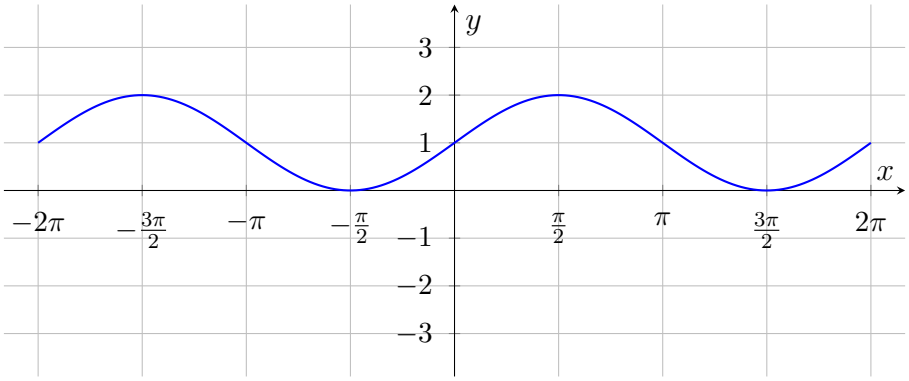
Aufgaben

Niveau A (Grundlagen / AB I)

A1: Funktionsgleichungen ablesen

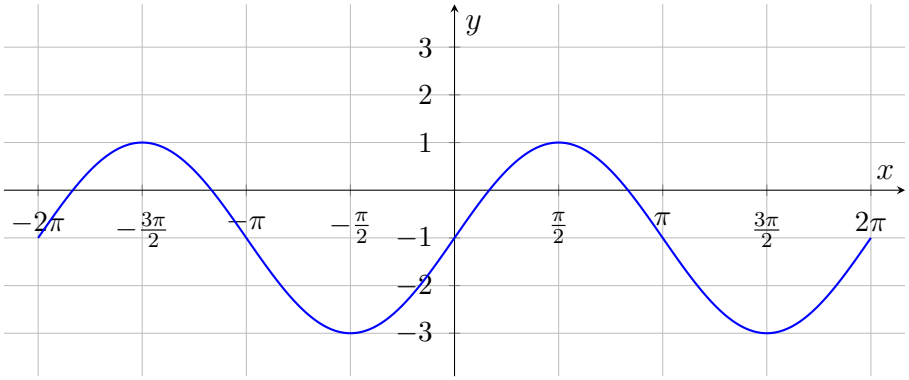
Betrachten Sie die vier Graphen und geben Sie jeweils eine möglichst einfache Funktionsgleichung an.

Graph 1



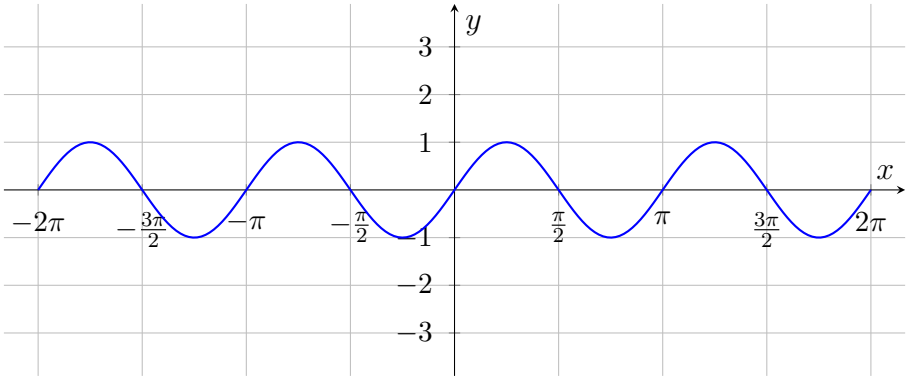
$f(x) =$ _____

Graph 2



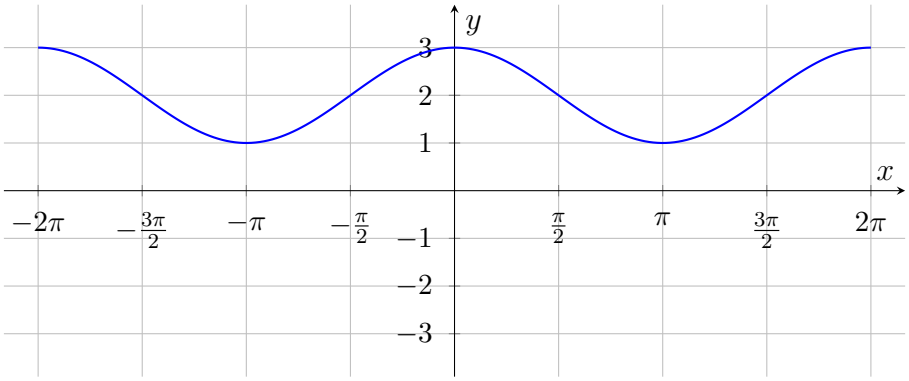
$f(x) =$ _____

Graph 3



$f(x) =$ _____

Graph 4



$f(x) =$ _____

A2: Parameter angeben
Lesen Sie Amplitude, Periode und Verschiebungen ab.

a) $f(x) = 2\sin(x) + 3$
Amplitude: _____ Periode: _____ Verschiebung in y-Richtung: _____

b) $f(x) = \sin(2x) - 1$
Amplitude: _____ Periode: _____ Verschiebung in y-Richtung: _____

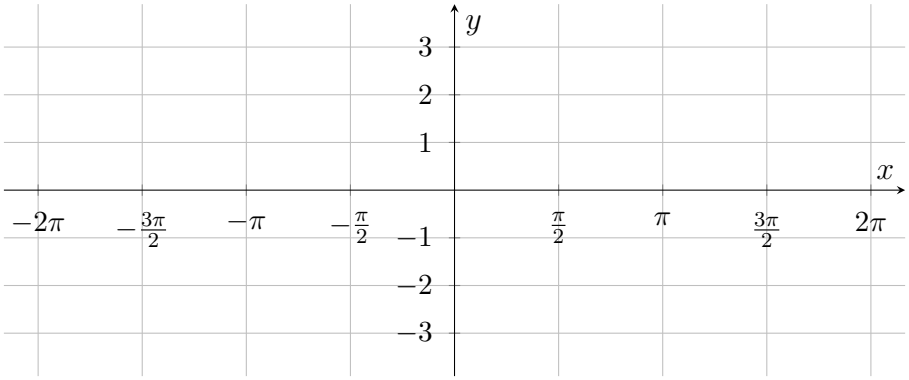
c) $f(x) = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$
Amplitude: _____ Periode: _____ Verschiebung in x-Richtung: _____
Verschiebung in y-Richtung: _____

d) **[Zusatz]** Geben Sie zu Graph 3 aus Aufgabe A1 eine Cosinusdarstellung an:
$f(x) =$ _____

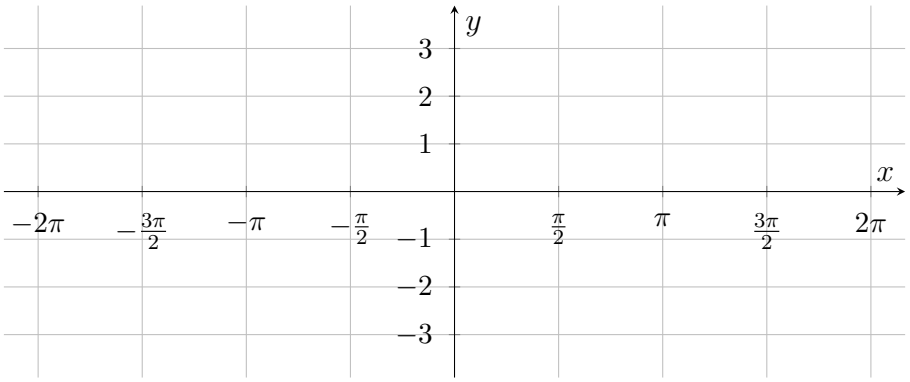
Niveau B (Transfer / AB II)

B1: Funktionen skizzieren
Skizzieren Sie die folgenden Funktionen in die gegebenen Koordinatensysteme. Markieren Sie dazu zuerst die Mittellinie, die Extremwerte und die Periodenlänge.

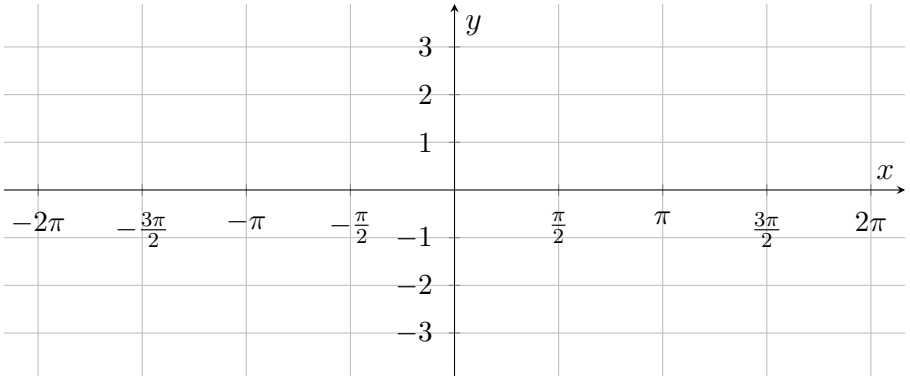
(a) $f(x) = 2\sin(x) - 1$



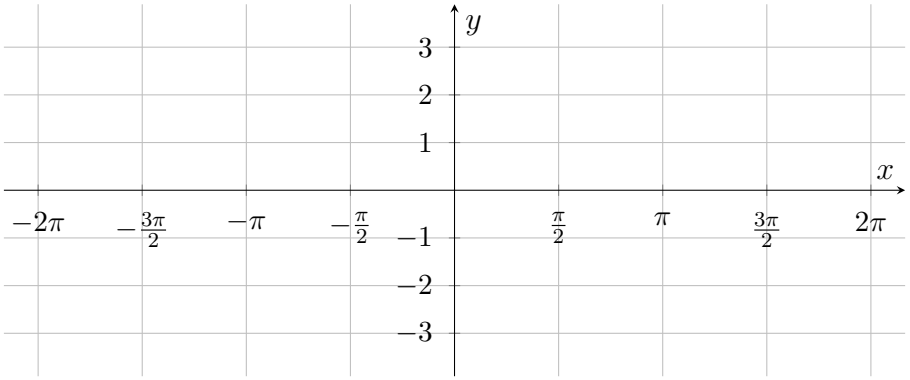
(b) $f(x) = \sin(2x) + 1$



(c) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$



(d) $f(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) - 1$



B2: Funktionsgleichungen aus Bedingungen bestimmen

a) Eine Sinusfunktion hat die Amplitude 4, die Periode 2π und ist um 3 nach oben verschoben. Bei $x = 0$ schneidet sie die Mittellinie steigend. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung.

b) Eine Cosinuskurve hat den Hochpunkt $H(0|5)$ und den Tiefpunkt $T(\pi|-1)$. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung.

c) Bestimmen Sie eine Sinusfunktion der Form

$$f(x) = a\sin(b(x-c)) + d$$

mit Amplitude 2, Periode 4π, Verschiebung um 1 nach rechts und Verschiebung um 2 nach unten.

d) **[Zusatz]** Eine Cosinuskurve hat den Hochpunkt $H\left(\frac{\pi}{4}|3\right)$ und den nächstgelegenen Tiefpunkt $T\left(\frac{3\pi}{4}|-1\right)$. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung.

B3: Transformationen beschreiben
Beschreiben Sie ausgehend von der Normalfunktion $f(x) = \sin(x)$ eine sinnvolle Reihenfolge von Transformationen, die zu

$$g(x) = 2\sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) - 3$$

führt.

Niveau C (Vertiefung / AB III)

a) **Riesenrad:**
Ein Riesenrad hat einen Radius von 20 m. Der Mittelpunkt der Gondelbahn befindet sich 25 m über dem Boden. Eine vollständige Umdrehung dauert 12 min. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich eine Gondel am tiefsten Punkt.

i. Geben Sie eine Funktionsgleichung $h(t)$ für die Höhe der Gondel über dem Boden an.

ii. Skizzieren Sie den Graphen für $0 \leq t \leq 24$. Verwenden Sie z. B. ein Koordinatensystem mit $0 \leq t \leq 24$ und $0 \leq h \leq 50$.

iii. Bestimmen Sie die Zeiten, zu denen die Gondel höher als 35 m ist.

iv. Interpretieren Sie die Parameter Amplitude, vertikale Verschiebung, Periode und Phase im Sachzusammenhang.

b) **Zusammenhang zwischen Sinus und Cosinus:**
Zeigen Sie zunächst allgemein für $b > 0$:

$$a\sin(b(x-c)) + d = a\cos\left(b\left(x - \left(c + \frac{\pi}{2b}\right)\right)\right) + d.$$

Wenden Sie dies auf

$$f(x) = 3\sin(2x - \pi) + 1$$

an. Geben Sie eine äquivalente Cosinusdarstellung mit möglichst kleinem $|c|$ an. Begründen Sie außerdem, warum auch

$$f(x) = -3\sin(2x) + 1$$

gilt.

c) **Bestimmung aus Extrempunkten:**
Gegeben sind der Hochpunkt

$$H\left(\frac{\pi}{6}|4\right)$$

und der nächstliegende Tiefpunkt

$$T\left(\frac{2\pi}{3}|-2\right)$$

einer Cosinusfunktion. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung

$$f(x) = a\cos(b(x-c)) + d$$

und prüfen Sie beide Punkte. Diskutieren Sie, ob die Funktion durch diese Angaben eindeutig festgelegt ist.

Lösungen

Zu Niveau A

A1

Es sind mehrere äquivalente Darstellungen möglich, z. B. durch andere Phasenverschiebungen.

- Graph 1: z. B. $f(x) = \sin(x) + 1$
- Graph 2: z. B. $f(x) = 2\sin(x) - 1$
- Graph 3: z. B. $f(x) = \sin(2x)$
- Graph 4: z. B. $f(x) = \cos(x) + 2$

A2

- Amplitude: 2, Periode: 2π, Verschiebung um 3 nach oben. Die Mittellinie ist $y = 3$.
- Amplitude: 1, Periode: π, Verschiebung um 1 nach unten. Die Mittellinie ist $y = -1$.
- Amplitude: 3, Periode: 2π, Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts und um 2 nach oben. Die Mittellinie ist $y = 2$.
- **[Zusatz]** Eine mögliche Cosinusdarstellung ist

$$f(x) = \cos\Big(2x - \frac{\pi}{2}\Big) = \cos\Big(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\Big).$$

Zu Niveau B

B1: Kontrollpunkte für die Skizzen

- **(a)** $f(x) = 2\sin(x) - 1$:
  Mittellinie $y = -1$, Amplitude 2, Periode 2π.
  Maximum z. B. bei $\big(\frac{\pi}{2}|1\big)$, Minimum z. B. bei $\big(\frac{3\pi}{2}|-3\big)$.
- **(b)** $f(x) = \sin(2x) + 1$:
  Mittellinie $y = 1$, Amplitude 1, Periode π.
  Maximum z. B. bei $\big(\frac{\pi}{4}|2\big)$, Minimum z. B. bei $\big(\frac{3\pi}{4}|0\big)$.
- **(c)** $f(x) = \cos\big(x - \frac{\pi}{2}\big) + 2$:
  Mittellinie $y = 2$, Amplitude 1, Periode 2π.
  Maximum z. B. bei $\big(\frac{\pi}{2}|3\big)$, Minimum z. B. bei $\big(\frac{3\pi}{2}|1\big)$.
- **(d)** $f(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) - 1$:
  Mittellinie $y = -1$, Amplitude $\frac{1}{2}$, Periode π.
  Minimum z. B. bei $(0|-1{,}5)$, Maximum z. B. bei $\big(\frac{\pi}{2}|-0{,}5\big)$.

B2

a) Eine mögliche Funktionsgleichung ist

$$f(x) = 4\sin(x) + 3.$$

b) Mittellinie: $d = \frac{5+(-1)}{2} = 2$, Amplitude: $a = \frac{5-(-1)}{2} = 3$.
Da bei $x = 0$ ein Maximum liegt, passt

$$f(x) = 3\cos(x) + 2.$$

c) Amplitude $a = 2$, Periode $T = 4\pi$, also

$$b = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}.$$

Verschiebung nach rechts: $c = 1$, Verschiebung nach unten: $d = -2$. Damit:

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}(x-1)\right) - 2.$$

d) **[Zusatz]**
Mittellinie:

$$d = \frac{3+(-1)}{2} = 1.$$

Amplitude:

$$a = \frac{3-(-1)}{2} = 2.$$

Der Abstand von Hochpunkt zu Tiefpunkt ist eine halbe Periode:

$$\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Also ist die ganze Periode $T = \pi$ und damit

$$b = \frac{2\pi}{T} = 2.$$

Da der Hochpunkt bei $x = \frac{\pi}{4}$ liegt, gilt z. B.

$$f(x) = 2\cos\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) + 1.$$

B3

Eine mögliche Reihenfolge ist:

1. Ausgangsfunktion: $f(x) = \sin(x)$.
2. Horizontale Stauchung um den Faktor $\frac{1}{2}$:

$$\sin(x) \longrightarrow \sin(2x).$$

3. Verschiebung um $\frac{\pi}{4}$ nach rechts:

$$\sin(2x) \longrightarrow \sin\Big(2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Big).$$

4. Vertikale Streckung um den Faktor 2:

$$\sin\Big(2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Big) \longrightarrow 2\sin\Big(2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Big).$$

5. Verschiebung um 3 nach unten:

$$2\sin\Big(2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Big) \longrightarrow 2\sin\Big(2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Big) - 3.$$

Zu Niveau C

C1: Riesenrad

i. Der Radius ist die Amplitude: $a = 20$. Die Mittelpunkthöhe ist die vertikale Verschiebung: $d = 25$. Die Umdrehungsdauer ist die Periode: $T = 12$. Damit:

$$b = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}.$$

Da die Gondel bei $t = 0$ am tiefsten Punkt ist, eignet sich eine negative Cosinusfunktion:

$$h(t) = 25 - 20\cos\Big(\frac{\pi}{6}t\Big).$$

Äquivalent ist z. B. auch

$$h(t) = 25 + 20\sin\Big(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{2}\Big).$$

ii. Wichtige Punkte für die Skizze:

$$(0|5), \quad (3|25), \quad (6|45), \quad (9|25), \quad (12|5),$$

$$(15|25), \quad (18|45), \quad (21|25), \quad (24|5).$$

Der Graph ist eine periodische Kurve mit Periode 12.

iii. Gesucht sind die Zeiten mit $h(t) > 35$:

$$25 - 20\cos\Big(\frac{\pi}{6}t\Big) > 35.$$

$$-20\cos\Big(\frac{\pi}{6}t\Big) > 10$$

$$\cos\Big(\frac{\pi}{6}t\Big) < -\frac{1}{2}.$$

In einer Periode $0 \le t < 12$ gilt:

$$\frac{\pi}{6}t \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right).$$

Daraus folgt:

$$t \in (4, 8).$$

Für den Zeitraum $0 \leq t \leq 24$ ergibt sich wegen der Periodenlänge 12:

$$t \in (4, 8) \cup (16, 20).$$

Die Gondel ist also zwischen Minute 4 und Minute 8 sowie zwischen Minute 16 und Minute 20 höher als 35 m.

iv. Interpretation:

- Die Amplitude 20 entspricht dem Radius des Riesenrads.
- Die vertikale Verschiebung 25 beschreibt die Höhe des Mittelpunkts über dem Boden.
- Die Periode 12 gibt die Dauer einer Umdrehung in Minuten an.
- Die Phase wurde so gewählt, dass die Gondel bei $t = 0$ den tiefsten Punkt erreicht.

C2: Zusammenhang zwischen Sinus und Cosinus

Es gilt die Identität

$$\sin(u) = \cos\left(u - \frac{\pi}{2}\right).$$

Mit $u = b(x - c)$ folgt:

$$a\sin(b(x-c)) + d = a\cos\left(b(x-c) - \frac{\pi}{2}\right) + d.$$

Nun formen wir den Term im Cosinus um:

$$b(x-c) - \frac{\pi}{2} = b\left(x - c - \frac{\pi}{2b}\right) = b\left(x - \left(c + \frac{\pi}{2b}\right)\right).$$

Damit:

$$a\sin(b(x-c)) + d = a\cos\Big(b\left(x - \left(c + \frac{\pi}{2b}\right)\right)\Big) + d.$$

Für

$$f(x) = 3\sin(2x - \pi) + 1$$

schreiben wir zunächst:

$$f(x) = 3\sin\Big(2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\Big) + 1.$$

Hier ist $a = 3$, $b = 2$, $c = \frac{\pi}{2}$, $d = 1$. Nach der Formel ergibt sich:

$$c + \frac{\pi}{2b} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Also:

$$f(x) = 3\cos\left(2\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)\right) + 1.$$

Wegen der Periodizität kann man auch schreiben:

$$3\cos\left(2\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)\right) = 3\cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) = 3\cos\Big(2x + \frac{\pi}{2}\Big).$$

Somit ist eine Darstellung mit möglichst kleinem $|c|$:

$$f(x) = 3\cos\Big(2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\Big) + 1.$$

Außerdem gilt:

$$\sin(2x - \pi) = -\sin(2x).$$

Daher:

$$f(x) = 3\sin(2x - \pi) + 1 = -3\sin(2x) + 1.$$

C3: Bestimmung aus Extrempunkten

Gegeben:

$$H\Big(\frac{\pi}{6}|4\Big), \qquad T\left(\frac{2\pi}{3}|-2\right).$$

Die Mittellinie ist der Durchschnitt von Hoch- und Tiefpunkt:

$$d = \frac{4 + (-2)}{2} = 1.$$

Die Amplitude ist die halbe Differenz:

$$a = \frac{4 - (-2)}{2} = 3.$$

Der Abstand von Hochpunkt zu Tiefpunkt ist eine halbe Periode:

$$\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

Also:

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad T = \pi.$$

Damit:

$$b = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2.$$

Da eine Cosinusfunktion bei $x = c$ ein Maximum hat und der Hochpunkt bei $x = \frac{\pi}{6}$ liegt, wählen wir

$$c = \frac{\pi}{6}.$$

Damit ergibt sich:

$$f(x) = 3\cos\Big(2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\Big) + 1.$$

Probe:

$$f\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = 3\cos(0) + 1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4.$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 3\cos\left(2\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)\right) + 1 = 3\cos\left(2 \cdot \frac{3\pi}{6}\right) + 1 = 3\cos(\pi) + 1 = -3 + 1 = -2.$$

Die Funktion ist nicht vollständig eindeutig, denn man kann die Phase um ganzzahlige Vielfache der Periode verschieben. Außerdem kann dieselbe Kurve auch durch eine Sinusfunktion mit anderer Phase dargestellt werden. Unter der Zusatzbedingung $a > 0$, $b > 0$ und c in einem festen Periodenintervall ist die angegebene Cosinusfunktion jedoch eindeutig.

Didaktische Hinweise zur Klausur- und Abiturvorbereitung (Hessen)

- Die Aufgabenfolge orientiert sich an der typischen Struktur von Klausuren und Abituraufgaben: Direktes Ablesen und Bestimmen von Parametern im **Anforderungsbereich I**, Übertragen und Skizzieren im **Anforderungsbereich II**, Begründen und Modellieren im **Anforderungsbereich III**.

- Im hessischen Lehrplan wird besonderer Wert auf die Verbindung von **Term**, **Graph** und **Sachkontext** gelegt. Schülerinnen und Schüler sollten daher immer erklären können, welche Bedeutung Amplitude, Periode und Verschiebungen haben.

- Typische Operatoren sind: *angeben*, *bestimmen*, *skizzieren*, *beschreiben*, *begründen*, *interpretieren* und *überprüfen*.

- Beim Skizzieren ist eine systematische Vorgehensweise sinnvoll: Mittellinie, Extremwerte, Periode, Startpunkt, Schlüsselpunkte. Dadurch werden Fehler bei Phasenverschiebungen reduziert.

- Digitale Werkzeuge wie GTR oder CAS können zur Kontrolle verwendet werden. Die mathematische Begründung, insbesondere die Parameterwirkung und die Transformationsreihenfolge, sollte jedoch ohne Werkzeug nachvollziehbar sein.

- Differenzierungsmöglichkeiten: Zusätzliche Aufgaben mit negativen Amplituden, mit Funktionen der Form $a\sin(bx + c) + d$, mit Phasenverschiebungen in beiden Darstellungen oder mit realen Daten, z. B. Gezeiten, Tageslängen oder Temperaturverläufen.