Sinus- und Cosinusfunktionen skizzieren

Systematisches Vorgehen – 11. Klasse, Gymnasium Hessen

Anleitung: So skizzierst du trigonometrische Funktionen

Gegeben ist eine Funktion der Form

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d \qquad \text{bzw.} \qquad f(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x - c)) + d$$

Schritt 1: Parameter von hinten nach vorne ablesen

1. d **(y-Verschiebung):** Die Mittellinie liegt bei $y = d$.
2. c **(x-Verschiebung):** Steht im Argument. *Wichtig:* Faktor b vor dem x ausklammern! Beispiel: $\sin(2x - \pi) = \sin\big(2(x - \frac{\pi}{2})\big) \Rightarrow c = \frac{\pi}{2}$ nach rechts.
3. a **(Amplitude):** Der Faktor vor sin bzw. cos.
   Ist $a < 0$, wird der Graph an der Mittellinie **gespiegelt**.
4. b **(Faktor im Argument):** Bestimmt die Periode: $p = \dfrac{2\pi}{b}$.

Schritt 2: Hilfsrechteck zeichnen

- Breite = eine Periode p, beginnend bei $x = c$.
- Höhe = von $y = d - |a|$ bis $y = d + |a|$.

Schritt 3: Mittellinie und Viertelung

- Mittellinie bei $y = d$ einzeichnen.
- Die Breite des Rechtecks in **4 gleiche Viertel** teilen: $\Delta x = \dfrac{p}{4}$.

Schritt 4: Funktionstyp beachten und 5 Schlüsselpunkte setzen

Punkt	x-Position	sin	cos
Start	c	Wendepunkt	Maximum
1. Viertel	$c + \frac{p}{4}$	Maximum	Wendepunkt
Mitte	$c + \frac{p}{2}$	Wendepunkt	Minimum
3. Viertel	$c + \frac{3p}{4}$	Minimum	Wendepunkt
Ende	$c + p$	Wendepunkt	Maximum

Bei negativem a: Maximum und Minimum vertauschen!

Schritt 5: Punkte glatt verbinden

Die 5 Punkte werden zu einer weichen Sinus-/Cosinus-Kurve verbunden. Fertig!

Einordnung in den Lehrplan (Hessen G11)

- **Inhaltsfeld:** Funktionen und Analysis – trigonometrische Funktionen
- **Kompetenzen:** Darstellen, Interpretieren, Mathematisch Argumentieren
- **Ziel:** Die Schülerinnen und Schüler können trigonometrische Funktionen anhand ihrer Parameter systematisch skizzieren und die Lage von Extrema und Wendepunkten begründen.
- **Abiturrelevanz:** Trigonometrische Funktionen sind zentraler Bestandteil der Analysis in der Qualifikationsphase.

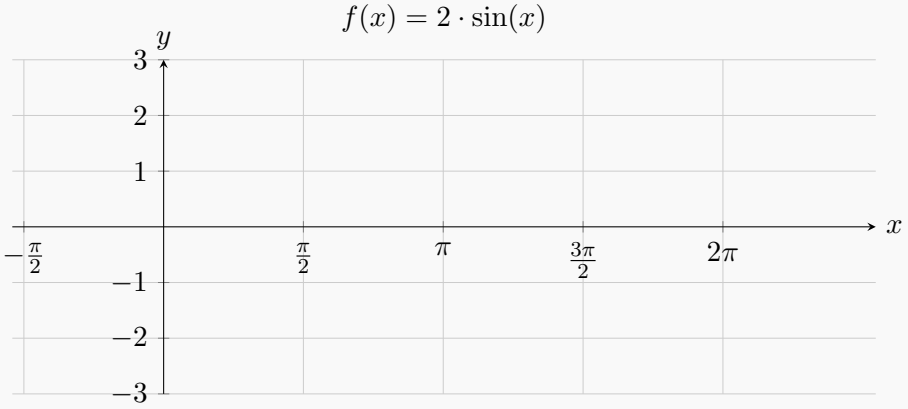
Aufgaben

Aufgabe 1

Niveau I (Grundlagen): Amplitude verändern

Skizziere die Funktion $f(x) = 2 \cdot \sin(x)$ im folgenden Koordinatensystem. Gehe nach der Anleitung vor und markiere die 5 Schlüsselpunkte.

$f(x) = 2 \cdot \sin(x)$

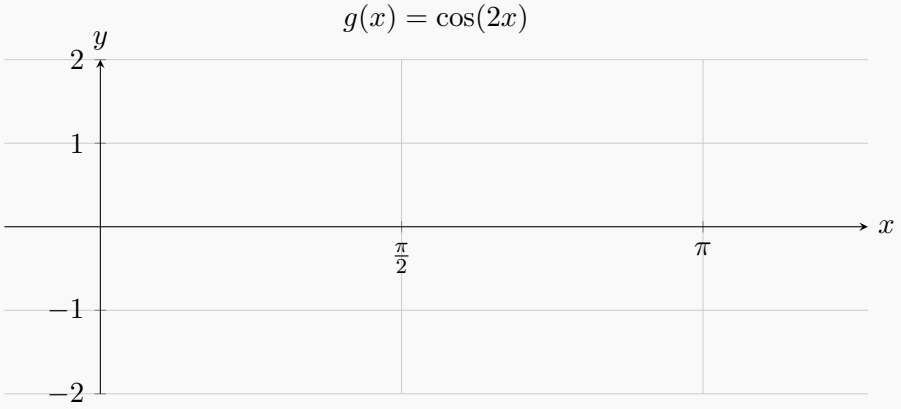


Aufgabe 2

Niveau I (Grundlagen): Periode verändern

Skizziere die Funktion $g(x) = \cos(2x)$ im folgenden Koordinatensystem.

$g(x) = \cos(2x)$

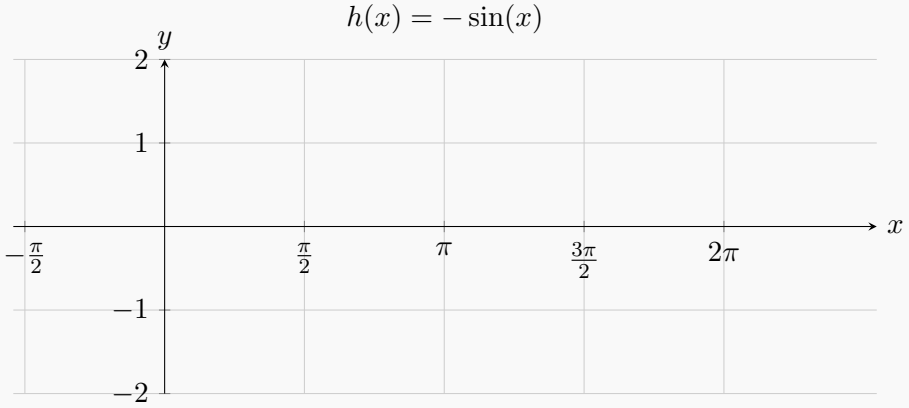


Aufgabe 3

Niveau I (Grundlagen): Spiegelung

Skizziere die Funktion $h(x) = -\sin(x)$ im folgenden Koordinatensystem.

$$h(x) = -\sin(x)$$

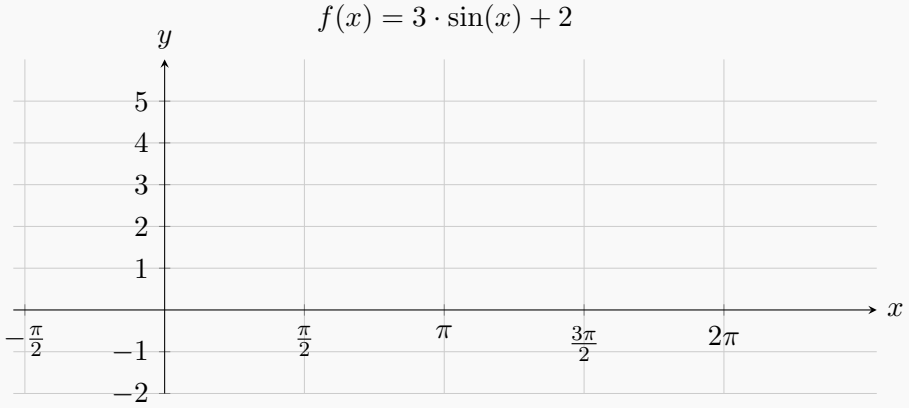


Aufgabe 4

Niveau II (Anwendung): Amplitude und y-Verschiebung

Skizziere die Funktion $f(x) = 3 \cdot \sin(x) + 2$ im folgenden Koordinatensystem.

$$f(x) = 3 \cdot \sin(x) + 2$$

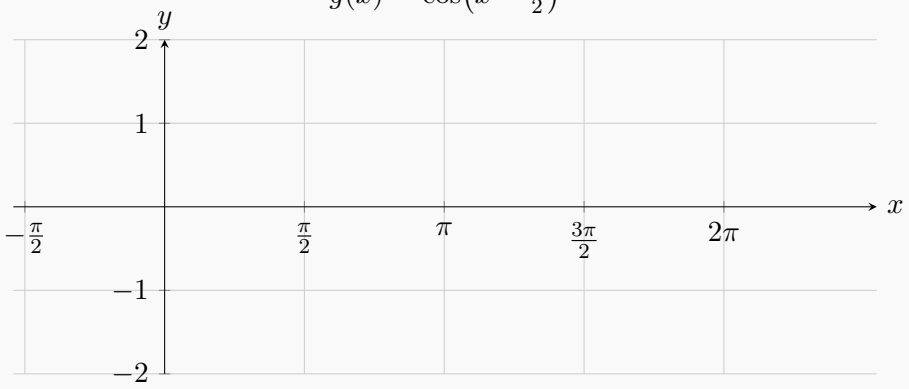


Aufgabe 5

Niveau II (Anwendung): x-Verschiebung

Skizziere die Funktion $g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ im folgenden Koordinatensystem.

$$g(x) = \cos\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)$$

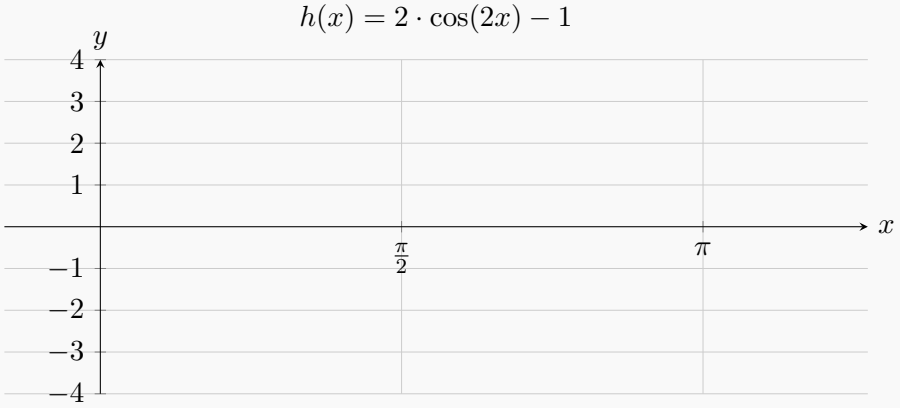


Aufgabe 6

Niveau II (Anwendung): Mehrere Parameter

Skizziere die Funktion $h(x) = 2 \cdot \cos(2x) - 1$ im folgenden Koordinatensystem.

$$h(x) = 2 \cdot \cos(2x) - 1$$



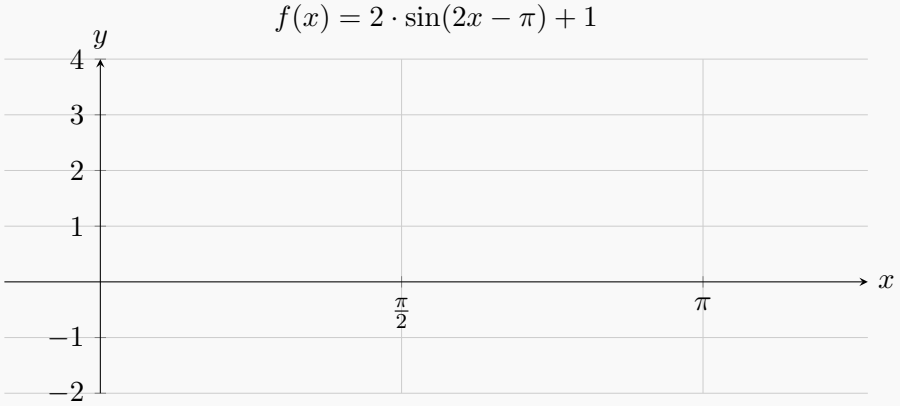
Aufgabe 7

Niveau III (Transfer): Alle Parameter

Skizziere die Funktion $f(x) = 2 \cdot \sin(2x - \pi) + 1$ im folgenden Koordinatensystem.

Tipp: Klammere den Faktor vor dem x aus!

$$f(x) = 2 \cdot \sin(2x - \pi) + 1$$



Aufgabe 8

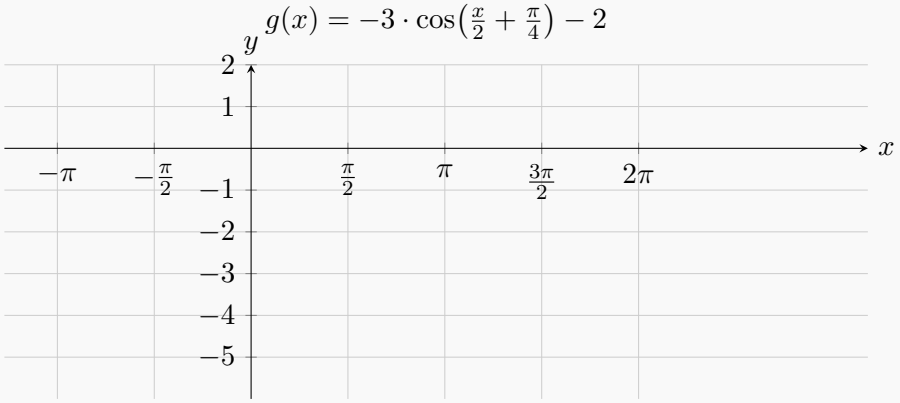
Niveau III (Transfer): Fehleranalyse

Ein Mitschüler hat die Funktion $g(x) = -3 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - 2$ skizziert und behauptet:

„Die Amplitude ist -3, die Periode ist 4π, der Graph ist um $\frac{\pi}{4}$ nach rechts verschoben und das erste Maximum liegt bei $x = -\frac{\pi}{4}$ auf Höhe $y = 1$."

a) Untersuche jede Aussage des Mitschülers auf Richtigkeit. Korrigiere die Fehler.

b) Skizziere die Funktion korrekt im folgenden Koordinatensystem.



Lösungen

Lösung 1

$f(x) = 2 \cdot \sin(x)$
Parameter: $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 0$
Amplitude $= 2$, *Periode* $p = 2\pi$, *Mittellinie* $y = 0$
Viertel: $\Delta x = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
5 Schlüsselpunkte:

- $x = 0$*: Wendepunkt bei* $y = 0$
- $x = \frac{\pi}{2}$*: Maximum bei* $y = 2$
- $x = \pi$*: Wendepunkt bei* $y = 0$
- $x = \frac{3\pi}{2}$*: Minimum bei* $y = -2$
- $x = 2\pi$*: Wendepunkt bei* $y = 0$

Lösung 2

$g(x) = \cos(2x)$
Parameter: $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$, $d = 0$
Amplitude $= 1$, *Periode* $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$, *Mittellinie* $y = 0$
Viertel: $\Delta x = \frac{\pi}{4}$
5 Schlüsselpunkte:

- $x = 0$*: Maximum bei* $y = 1$
- $x = \frac{\pi}{4}$*: Wendepunkt bei* $y = 0$
- $x = \frac{\pi}{2}$*: Minimum bei* $y = -1$
- $x = \frac{3\pi}{4}$*: Wendepunkt bei* $y = 0$
- $x = \pi$*: Maximum bei* $y = 1$

Lösung 3

$h(x) = -\sin(x)$
Parameter: $a = -1$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 0$
Amplitude $= 1$, *Periode* $p = 2\pi$, *Mittellinie* $y = 0$
Negatives a: Maximum und Minimum vertauschen!
Viertel: $\Delta x = \frac{\pi}{2}$
5 Schlüsselpunkte:

- $x = 0$*: Wendepunkt bei* $y = 0$
- $x = \frac{\pi}{2}$*:* ***Minimum*** *bei* $y = -1$
- $x = \pi$*: Wendepunkt bei* $y = 0$

- $x = \frac{3\pi}{2}$: ***Maximum*** *bei* $y = 1$
- $x = 2\pi$: *Wendepunkt bei* $y = 0$

Lösung 4

$f(x) = 3 \cdot \sin(x) + 2$
Parameter: $a = 3$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 2$
Amplitude $= 3$, *Periode* $p = 2\pi$, *Mittellinie* $y = 2$
Extrema: Maximum bei $y = 5$, *Minimum bei* $y = -1$
Viertel: $\Delta x = \frac{\pi}{2}$
5 Schlüsselpunkte:

- $x = 0$: *Wendepunkt bei* $y = 2$
- $x = \frac{\pi}{2}$: *Maximum bei* $y = 5$
- $x = \pi$: *Wendepunkt bei* $y = 2$
- $x = \frac{3\pi}{2}$: *Minimum bei* $y = -1$
- $x = 2\pi$: *Wendepunkt bei* $y = 2$

Lösung 5

$g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
Parameter: $a = 1$, $b = 1$, $c = \frac{\pi}{2}$, $d = 0$
Amplitude $= 1$, *Periode* $p = 2\pi$, *Mittellinie* $y = 0$
Verschiebung: $\frac{\pi}{2}$ *nach rechts*
Viertel: $\Delta x = \frac{\pi}{2}$
5 Schlüsselpunkte:

- $x = \frac{\pi}{2}$: *Maximum bei* $y = 1$
- $x = \pi$: *Wendepunkt bei* $y = 0$
- $x = \frac{3\pi}{2}$: *Minimum bei* $y = -1$
- $x = 2\pi$: *Wendepunkt bei* $y = 0$
- $x = \frac{5\pi}{2}$: *Maximum bei* $y = 1$

Lösung 6

$h(x) = 2 \cdot \cos(2x) - 1$
Parameter: $a = 2$, $b = 2$, $c = 0$, $d = -1$
Amplitude $= 2$, *Periode* $p = \pi$, *Mittellinie* $y = -1$
Extrema: Maximum bei $y = 1$, *Minimum bei* $y = -3$
Viertel: $\Delta x = \frac{\pi}{4}$
5 Schlüsselpunkte:

- $x = 0$: *Maximum bei* $y = 1$

- $x = \frac{\pi}{4}$: *Wendepunkt bei* $y = -1$
- $x = \frac{\pi}{2}$: *Minimum bei* $y = -3$
- $x = \frac{3\pi}{4}$: *Wendepunkt bei* $y = -1$
- $x = \pi$: *Maximum bei* $y = 1$

Lösung 7

$f(x) = 2 \cdot \sin(2x - \pi) + 1$
Ausklammern: $f(x) = 2 \cdot \sin\big(2\big(x - \frac{\pi}{2}\big)\big) + 1$
Parameter: $a = 2$, $b = 2$, $c = \frac{\pi}{2}$, $d = 1$
Amplitude $= 2$, *Periode* $p = \pi$, *Mittellinie* $y = 1$
Verschiebung: $\frac{\pi}{2}$ *nach rechts*
Extrema: Maximum bei $y = 3$, *Minimum bei* $y = -1$
Viertel: $\Delta x = \frac{\pi}{4}$

5 Schlüsselpunkte:

- $x = \frac{\pi}{2}$: *Wendepunkt bei* $y = 1$
- $x = \frac{3\pi}{4}$: *Maximum bei* $y = 3$
- $x = \pi$: *Wendepunkt bei* $y = 1$
- $x = \frac{5\pi}{4}$: *Minimum bei* $y = -1$
- $x = \frac{3\pi}{2}$: *Wendepunkt bei* $y = 1$

Lösung 8

$g(x) = -3 \cdot \cos\big(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\big) - 2$
Ausklammern: $g(x) = -3 \cdot \cos\big(\frac{1}{2}\big(x + \frac{\pi}{2}\big)\big) - 2$
Parameter: $a = -3$, $b = \frac{1}{2}$, $c = -\frac{\pi}{2}$, $d = -2$

Fehleranalyse:

- *„Amplitude ist* -3*:* ***Falsch!*** *Die Amplitude ist immer positiv:* $|a| = 3$*. Das negative Vorzeichen bewirkt eine Spiegelung an der Mittellinie.*
- *„Periode ist* 4π*:* ***Richtig!*** $p = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$*.*
- *„um* $\frac{\pi}{4}$ *nach rechts verschoben:* ***Falsch!*** *Nach dem Ausklammern ist* $c = -\frac{\pi}{2}$*, also* $\frac{\pi}{2}$ *nach* ***links****.*
- *„erstes Maximum bei* $x = -\frac{\pi}{4}$ *auf Höhe* $y = 1$*:* ***Falsch!*** *Wegen* $a = -3$ *(Spiegelung) startet der Cosinus mit einem* ***Minimum*** *bei* $x = -\frac{\pi}{2}$ *auf Höhe* $y = -2 - 3 = -5$*. Das erste Maximum liegt erst bei* $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2}$ *auf Höhe* $y = -2 + 3 = 1$*.*

5 Schlüsselpunkte:

- $x = -\frac{\pi}{2}$: ***Minimum*** *bei* $y = -5$
- $x = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$: *Wendepunkt bei* $y = -2$

- $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2}$: ***Maximum*** *bei* $y = 1$
- $x = -\frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{5\pi}{2}$: *Wendepunkt bei* $y = -2$
- $x = -\frac{\pi}{2} + 4\pi = \frac{7\pi}{2}$: ***Minimum*** *bei* $y = -5$

Didaktische Hinweise für die Lehrkraft

- **Curriculumbezug:** Die Aufgaben orientieren sich am Inhaltsfeld *Funktionen und Analysis* des hessischen Kerncurriculums G9. Zentrale Kompetenzen sind *Darstellen* und *Mathematisch Argumentieren*.
- **Didaktischer Aufbau:** Das Arbeitsblatt folgt dem in der Unterrichtsstunde erarbeiteten systematischen Vorgehen (Parameter ablesen → Rechteck → vierteln → zeichnen). Niveau I festigt einzelne Parameter, Niveau II kombiniert mehrere, Niveau III fordert Transfer und Fehleranalyse.
- **Häufige Fehlerquellen:**
  - Vergessen, den Faktor b vor dem x auszuklammern (Aufgaben 7 und 8)
  - Verwechslung von Amplitude und Wertebereich
  - Falsche Interpretation des Vorzeichens von a
  - Verwechslung der Startpunkte von Sinus und Cosinus
- **Kombination mit H5P:** Dieses Arbeitsblatt eignet sich ideal als Vertiefung nach dem interaktiven H5P-Buch. Empfehlung: H5P-Buch als Hausaufgabe, Arbeitsblatt in der Folgestunde.
- **Differenzierung:** Schnelle Schüler können bei Aufgabe 8 zusätzlich die Gleichung einer Funktion bestimmen, die durch Verschiebung der gegebenen Funktion entsteht.
- **Material:** Die Koordinatensysteme sind bereits mit π-Teilung vorbereitet. Für eine noch genauere Skizze können die Schüler die Viertelungslinien mit Bleistift vorzeichnen.

Viel Erfolg beim Skizzieren – und denk an die 5 Punkte!