Quadratische Funktionen: Die pq-Formel

Einstiegsbeispiel: Der Basketball-Wurf

1. Szenario

Ein Basketballspieler wirft den Ball Richtung Korb. Die Flugbahn des Balls lässt sich in einem Koordinatensystem durch folgende Funktion beschreiben:

$$f(x) = -0{,}2x^2 + 1{,}2x + 2$$

Dabei ist x die horizontale Entfernung zum Werfer in Metern und $f(x)$ die Höhe des Balls in Metern.

2. Verständnisfragen

a) Aus welcher Höhe wird der Ball abgeworfen?

b) Der Basketballkorb hängt (vereinfacht für diese Aufgabe) in 3 Metern Höhe. In welcher Entfernung muss der Spieler stehen, um den Korb exakt zu treffen?

3. Die Gleichung aufstellen

Die Schüler stellen die Gleichung auf:

$$-0{,}2x^2 + 1{,}2x + 2 = 3$$

4. Der Lösungsweg

Schritt 1: Gleichung auf 0 bringen:

$$-0{,}2x^2 + 1{,}2x - 1 = 0$$

Schritt 2: Durch $-0{,}2$ teilen (damit vor x^2 eine 1 steht):

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

Schritt 3: Normalform erreicht: $p = -6$, $q = 5$
Schritt 4: pq-Formel anwenden:
Die pq-Formel lautet:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Einsetzen von $p = -6$ und $q = 5$:

$$x_{1,2} = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 5}$$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 5} = 3 \pm \sqrt{4} = 3 \pm 2$$

Schritt 5: Ergebnisse:

$$x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_2 = 5$$

5. Interpretation

Der Ball ist auf 3 Meter Höhe, wenn er 1 Meter vom Werfer entfernt ist (auf dem **aufsteigenden Ast** der Parabel). Er ist auch auf 3 Meter Höhe, wenn er 5 Meter entfernt ist (auf dem **absteigenden Ast**).

Wenn der Korb also in 5 Metern Entfernung steht, trifft der Spieler ihn genau.

Allgemeine pq-Formel

Für quadratische Gleichungen in Normalform

$$x^2 + px + q = 0$$

lautet die Lösungsformel (pq-Formel):

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$