Lagebeziehungen & Schnittpunkte von Geraden

Lineare Funktionen – 11. Klasse, Gymnasium Hessen

Kurze Einführung

Zu jeder Geraden g und h in der Form $y = m \cdot x + b$ gehören zwei wichtige Kenngrößen:

- die **Steigung** m (wie stark die Gerade steigt oder fällt)
- der **y-Achsenabschnitt** b (wo die Gerade die y-Achse schneidet)

Lagebeziehungen zweier Geraden:

- $m_g \neq m_h$: Geraden **schneiden** sich in genau einem Punkt S
- $m_g = m_h$ und $b_g \neq b_h$: Geraden sind **parallel** (kein Schnittpunkt)
- $m_g = m_h$ und $b_g = b_h$: Geraden sind **identisch** (unendlich viele Schnittpunkte)
- $m_g \cdot m_h = -1$: Geraden stehen **senkrecht** aufeinander

Schnittpunktberechnung:

1. Gleichsetzen: $g(x) = h(x)$
2. Nach x auflösen
3. x in eine der Gleichungen einsetzen $\Rightarrow$ y-Koordinate
4. Schnittpunkt $S(x \mid y)$ angeben

*Hinweis: Zur Überprüfung empfiehlt sich immer eine **Probe** mit der jeweils anderen Geradengleichung.*

Einordnung in den Lehrplan (Hessen G11)

- **Kompetenzbereich:** *Argumentieren / Kommunizieren, Modellieren, Problemlösen*
- **Inhaltsfeld:** *Funktionen und Analysis* – lineare Funktionen als Grundlage für alle weiteren Funktionstypen
- **Übergeordnetes Ziel:** Die Schülerinnen und Schüler können lineare Zusammenhänge in Sachsituationen erkennen, als Geraden darstellen, Schnittpunkte rechnerisch bestimmen und die Ergebnisse im Kontext interpretieren.
- **Abiturrelevanz:** Lineare Funktionen bilden das Fundament für Analysis und Lineare Algebra in der Oberstufe. Das rechnerische Bestimmen von Schnittpunkten wird in nahezu jeder Abituraufgabe vorausgesetzt.

Aufgaben

Aufgabe 1

Niveau I (Grundlagen): Schnittpunkte berechnen
Gegeben sind die Geraden g und h. Berechne jeweils den Schnittpunkt S und gib eine **Probe** an.

a) $g : y = 2x - 1$ und $h : y = -x + 5$

b) $g : y = -3x + 4$ und $h : y = x - 8$

c) $g : y = 0{,}5x + 2$ und $h : y = -0{,}5x + 6$

Aufgabe 2

Niveau I (Grundlagen): Lagebeziehungen erkennen

Bestimme jeweils die Lagebeziehung der beiden Geraden (*sich schneidend, parallel, identisch oder senkrecht*). Begründe deine Antwort.

a) $g : y = 4x + 2$ und $h : y = 4x - 7$

b) $g : y = 3x - 1$ und $h : y = 3x - 1$

c) $g : y = 2x + 5$ und $h : y = -0{,}5x + 1$

d) $g : y = -2x + 3$ und $h : y = 5x + 3$

Aufgabe 3

Niveau II (Anwendung): Fehleranalyse – „Finde den Fehler!"

Ein Mitschüler hat folgende Aufgabe bearbeitet:

„Aufgabe: Berechne den Schnittpunkt von $g : y = 3x + 2$ *und* $h : y = -x + 10$.
Meine Lösung:

$$\begin{aligned} 3x + 2 &= -x + 10 \quad | - 2 \\ 3x &= -x + 8 \quad | + x \\ 4x &= 8 \quad | : 4 \\ x &= 2 \\ y &= 3 \cdot 2 + 2 = 8 \end{aligned}$$

$\Rightarrow S(2 \mid 8)$"

a) Untersuche die Lösung deines Mitschülers auf **Rechenfehler**. Findest du einen? Wenn ja, wo und was wurde falsch gemacht?

b) Berechne den **korrekten** Schnittpunkt und führe eine Probe durch.

Aufgabe 4

Niveau II (Anwendung): Sachaufgabe: Netflix vs. Disney+

Du möchtest dir einen Streaming-Dienst zulegen und vergleichst zwei Angebote:

- **Netflix Standard:** Grundgebühr 13,49 € pro Monat, dafür unbegrenztes Schauen.
- **Disney+ mit Kinoleihe:** Grundgebühr 7,99 € pro Monat, dazu jeder ausgeliehene Kinofilm 4,50 €.

a) Stelle für beide Dienste eine Kostenfunktion $K(x)$ in Abhängigkeit von der Anzahl x der ausgeliehenen Kinofilme pro Monat auf.

b) Berechne rechnerisch, ab wie vielen ausgeliehenen Filmen sich Disney+ **nicht mehr** lohnt (d. h. wann Netflix günstiger ist).

c) Interpretiere das Ergebnis: Für wen lohnt sich welcher Dienst?

Aufgabe 5

Niveau II (Anwendung): Sachaufgabe: Fortnite V-Bucks
Zwei Freunde sparen für ein neues Skin-Bundle in Fortnite, das 2800 V-Bucks kostet.

- **Leon** hat bereits 400 V-Bucks gespart und bekommt jede Woche 200 V-Bucks Taschengeld.
- **Mia** hat noch 0 V-Bucks, bekommt aber jede Woche 350 V-Bucks Taschengeld.

a) Stelle für beide eine Funktion $V(w)$ auf, die den V-Bucks-Bestand nach w Wochen beschreibt.

b) Nach wie vielen Wochen haben beide gleich viele V-Bucks? Wie viele sind das?

c) Nach wie vielen Wochen kann jeder von ihnen das Skin-Bundle kaufen?

Aufgabe 6

Niveau III (Transfer): Fehleranalyse – „Der Lehrer hat sich vertan!"
In einer Klassenarbeit stand folgende Aufgabe:

„Gegeben sind $g : y = 2x + 1$ und $h : y = -\frac{1}{2}x + 4$.
Bestimme den Schnittpunkt und beschreibe die besondere Lagebeziehung."

Dein Lehrer hat als Lösung angegeben:

„Die Geraden stehen senkrecht aufeinander, da $m_g \cdot m_h = 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = -1$.
Der Schnittpunkt ist $S(2 \mid 5)$."

a) Überprüfe die **beiden** Aussagen des Lehrers (Lagebeziehung und Schnittpunkt). Welche ist richtig, welche falsch?

b) Berechne den **tatsächlichen** Schnittpunkt vollständig und mit Probe.

c) *Transfer*: Warum ist es mathematisch **unmöglich**, dass zwei zueinander **senkrechte** Geraden **parallel** sind? Begründe mit den Steigungen.

Aufgabe 7

Niveau III (Transfer): Sachaufgabe: TikTok-Clip-Produktion
Du startest einen TikTok-Kanal und möchtest herausfinden, wann du mit deinem Kanal break-even bist (also keine Verluste mehr machst).

- Du investierst zu Beginn 150 € in ein Mikrofon und ein Ringlicht.
- Jeder Clip, den du hochlädst, bringt dir durchschnittlich 0,80 € an Werbeeinnahmen.
- Jeder Clip kostet dich aber 0,20 € an Bearbeitungszeit (Strom, Software-Abo anteilig).

a) Stelle eine Kostenfunktion $K(x)$ und eine Erlösfunktion $E(x)$ in Abhängigkeit von der Anzahl x der Clips auf.

b) Berechne, wie viele Clips du mindestens hochladen musst, um in die Gewinnzone zu kommen.

c) *Modellkritik*: Nenne **zwei** Gründe, warum dieses lineare Modell in der Realität **nicht dauerhaft** gültig ist.

d) *Transfer*: Ein Freund meint: „Wenn du deine Bearbeitungszeit auf 0,50 € pro Clip reduzierst, brauchst du nur noch halb so viele Clips." Hat er recht? Berechne und vergleiche.

Lösungen

Lösung 1

Schnittpunkte berechnen

a) $2x - 1 = -x + 5 \;|+x\;|+1 \;\Rightarrow\; 3x = 6 \;\Rightarrow\; x = 2$
$y = 2 \cdot 2 - 1 = 3 \;\Rightarrow\; S(2 \mid 3)$
Probe in h: $y = -2 + 5 = 3$ ✓

b) $-3x + 4 = x - 8 \;|-x\;|-4 \;\Rightarrow\; -4x = -12 \;\Rightarrow\; x = 3$
$y = -3 \cdot 3 + 4 = -5 \;\Rightarrow\; S(3 \mid -5)$
Probe in h: $y = 3 - 8 = -5$ ✓

c) $0{,}5x + 2 = -0{,}5x + 6 \;|+0{,}5x\;|-2 \;\Rightarrow\; x = 4$
$y = 0{,}5 \cdot 4 + 2 = 4 \;\Rightarrow\; S(4 \mid 4)$
Probe in h: $y = -0{,}5 \cdot 4 + 6 = 4$ ✓

Lösung 2

Lagebeziehungen erkennen

a) $m_g = m_h = 4$, *aber* $b_g = 2 \neq b_h = -7 \Rightarrow$ ***parallel***
b) $m_g = m_h = 3$ *und* $b_g = b_h = -1 \Rightarrow$ ***identisch***
c) $m_g \cdot m_h = 2 \cdot (-0{,}5) = -1 \Rightarrow$ ***senkrecht***
d) $m_g = -2 \neq m_h = 5$ *und* $m_g \cdot m_h = -10 \neq -1 \Rightarrow$ ***sich schneidend*** *(allgemein)*

Lösung 3

Fehleranalyse

a) Der Mitschüler hat ***keinen Rechenfehler*** *gemacht. Alle Äquivalenzumformungen sind korrekt.*
Allerdings: Die Probe mit h ergibt $y = -2 + 10 = 8$ ✓*– das Ergebnis ist also tatsächlich richtig!*
Hinweis für die Klasse: Nicht jede „Fehleraufgabe" enthält tatsächlich einen Fehler. Genaues Prüfen ist wichtig.

b) Korrekter Schnittpunkt: $S(2 \mid 8)$*, Probe:* $h(2) = -2 + 10 = 8$ ✓

Lösung 4

Netflix vs. Disney+

a) Netflix: $K_N(x) = 13{,}49$ *(unabhängig von x)*
Disney+: $K_D(x) = 7{,}99 + 4{,}50 \cdot x$

b) Gleichsetzen: $13{,}49 = 7{,}99 + 4{,}50x \;\Rightarrow\; 5{,}50 = 4{,}50x \;\Rightarrow\; x \approx 1{,}22$
Ab dem ***2. ausgeliehenen Film*** *ist Netflix günstiger.*

c) Interpretation: Wer weniger als 2 Kinofilme pro Monat schaut, fährt mit Disney+ günstiger. Wer mehr schaut, sollte Netflix wählen.

Lösung 5

Fortnite V-Bucks

a) Leon: $V_L(w) = 400 + 200w$
Mia: $V_M(w) = 350w$

b) $400 + 200w = 350w \Rightarrow 400 = 150w \Rightarrow w = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$ *Wochen*
Nach ca. 2 Wochen und 4 Tagen haben beide gleich viele V-Bucks: $V = 350 \cdot \frac{8}{3} \approx 933$ *V-Bucks.*

c) Leon: $400 + 200w = 2800 \Rightarrow w = 12$ *Wochen*
Mia: $350w = 2800 \Rightarrow w = 8$ *Wochen*

Lösung 6

Fehleranalyse – „Der Lehrer hat sich vertan!"

a) Die Aussage zur ***Lagebeziehung ist richtig****:* $2 \cdot (-\frac{1}{2}) = -1 \Rightarrow$ *senkrecht.*
Der angegebene ***Schnittpunkt ist falsch****: Probe in g:* $y = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ ✓*, Probe in h:* $y = -\frac{1}{2} \cdot 2 + 4 = 3 \neq 5$ *55*

b) $2x + 1 = -\frac{1}{2}x + 4 \mid + \frac{1}{2}x \mid - 1 \Rightarrow \frac{5}{2}x = 3 \Rightarrow x = \frac{6}{5} = 1{,}2$
$y = 2 \cdot 1{,}2 + 1 = 3{,}4 \Rightarrow S(1{,}2 \mid 3{,}4)$
Probe in h: $y = -0{,}5 \cdot 1{,}2 + 4 = 3{,}4$ ✓

c) Zwei Geraden sind senkrecht $\Leftrightarrow m_g \cdot m_h = -1$.
Wären sie zusätzlich parallel, müsste $m_g = m_h$ *gelten.*
Dann wäre $m_g \cdot m_g = -1 \Rightarrow m_g^2 = -1$*, was in* $\mathbb{R}$ *keine Lösung hat.*
$\Rightarrow$ *Zwei Geraden können* ***nie gleichzeitig senkrecht und parallel*** *sein.*

Lösung 7

TikTok-Clip-Produktion

a) Kosten: $K(x) = 150 + 0{,}20x$ *(Fixkosten + variable Kosten)*
Erlöse: $E(x) = 0{,}80x$

b) Gewinnschwelle: $E(x) = K(x) \Rightarrow 0{,}80x = 150 + 0{,}20x \Rightarrow 0{,}60x = 150 \Rightarrow x = 250$
Ab dem ***251. Clip*** *machst du Gewinn.*

c) Mögliche Gründe für Modellgrenzen:

- *Die Werbeeinnahmen pro Clip sind nicht konstant – sie hängen von Views, Algorithmus, Trends ab.*
- *Ab einer gewissen Clip-Anzahl steigt der Aufwand überproportional (Burnout, Content-Ideen werden knapp).*
- *TikTok kann die Monetarisierungsregeln jederzeit ändern.*

d) Neuer Break-even: $0{,}80x = 150 + 0{,}50x \Rightarrow 0{,}30x = 150 \Rightarrow x = 500$
Der Freund hat ***keine*** *recht – bei höherer Bearbeitungszeit braucht man* ***mehr*** *Clips (500 statt 250), nicht weniger!*

Didaktische Hinweise für die Lehrkraft

- **Curriculumbezug**: Die Aufgaben orientieren sich an den Kompetenzbereichen *Argumentieren*, *Problemlösen* und *Modellieren* des hessischen Kerncurriculums Mathematik G9. Lineare Funktionen sind explizit als Grundkompetenz für die Qualifikationsphase ausgewiesen.
- **Abitur-Relevanz**: Das rechnerische Bestimmen von Schnittpunkten ist eine *Basiskompetenz*, die in nahezu jeder Analysis- und jeder LK-Aufgabe der Linearen Algebra vorausgesetzt wird.
- **Differenzierung**: Die drei Niveaustufen ermöglichen Binnendifferenzierung. Niveau I sichert das Handwerkszeug, Niveau II fördert Anwendung und Fehlerkompetenz, Niveau III bereitet auf Transfer- und Modellierungsaufgaben vor.
- **Fehleraufgaben**: Aufgaben 3 und 6 trainieren explizit die *Fehlerkompetenz* – eine laut Bildungsstandards zentrale Fähigkeit. Besonders Aufgabe 3 enthält *bewusst keinen Fehler*, was die Schüler zu genauem Prüfen zwingt.
- **Lebensweltbezug**: Die Sachaufgaben (Streaming, Gaming, Social Media) knüpfen an die Lebensrealität der Schüler an und motivieren zur eigenständigen Modellierung.
- **Modellkritik**: Aufgabe 7c fordert explizit zur Reflexion von Modellgrenzen auf – eine Schlüsselkompetenz für die Oberstufe.
- **Kombination mit H5P**: Dieses Arbeitsblatt eignet sich ideal als *Vertiefung* nach dem interaktiven Video. Empfehlung: Video als Hausaufgabe, Arbeitsblatt in der Folgestunde.

Viel Erfolg beim Rechnen – und denkt an die Probe!