Lösungen von linearen Gleichungssystemen mit dem Gauß-Algorithmus

Übungsmaterial für die Qualifikationsphase (Q1/Q2) – Hessen

Mathematisches „Kochrezept“ für den Gauß-Algorithmus

Der Gauß-Algorithmus ist ein systematisches Verfahren, um lineare Gleichungssysteme (LGS) zu lösen. Dieses „Kochrezept“ hilft, Schritt für Schritt sicher vorzugehen. Auf diesem Arbeitsblatt wird bewusst auf Zeilen- und Spaltenvertauschungen verzichtet. Alle Systeme sind so gewählt, dass die führenden Zahlen direkt passend stehen.

Schritt 1: **Erweiterte Koeffizientenmatrix aufschreiben:** Zu einem linearen Gleichungssystem wird die erweiterte Koeffizientenmatrix gebildet. Die Koeffizienten der Variablen stehen links, die rechten Seiten der Gleichungen in der letzten Spalte.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 7 \\ x - y + 2z &= 1 \\ 3x + y - z &= 4 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

Schritt 2: **Erlaubte Zeilenoperationen nutzen:** Auf diesem Arbeitsblatt werden keine Zeilen oder Spalten vertauscht. Erlaubt sind insbesondere:

- Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl ungleich null: $Z_i \leftarrow aZ_i$ mit $a \neq 0$,
- Addition eines Vielfachen einer anderen Zeile: $Z_i \leftarrow Z_i + \lambda Z_k$,
- Kombinationen daraus, z. B. $Z_i \leftarrow aZ_i + bZ_k$ mit $a \neq 0$.

Diese Umformungen verändern die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems nicht.

Schritt 3: **Pivot nutzen:** In der ersten Zeile beginnt man mit der ersten Spalte. Die Zahl in Zeile 1, Spalte 1 ist hier der Pivot. Bei den Aufgaben dieses Arbeitsblattes ist diese Zahl immer ungleich null, sodass kein Zeilentausch nötig ist.

Schritt 4: **Nach unten eliminieren:** Unterhalb des Pivots werden alle Einträge durch Zeilenoperationen zu null gemacht. Danach geht man zur nächsten Zeile und nächsten Spalte. Auch dort wird jeweils ohne Vertauschung gearbeitet.

Schritt 5: Zeilenstufenform prüfen: Ziel ist eine Treppenform. Bei einem linearen Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Variablen gibt es genau dann genau eine Lösung, wenn in der Stufenform für jede Variable ein Pivot existiert und kein Widerspruch wie $0 = 1$ auftritt.

Schritt 6: Rückwärtssubstitution durchführen: Aus der letzten Zeile wird die dritte Variable berechnet. Danach setzt man diese Lösung in die Zeile darüber ein und bestimmt so schrittweise alle Variablen.

Schritt 7: Probe machen: Die gefundene Lösung wird in die ursprünglichen Gleichungen eingesetzt. So können Rechenfehler erkannt werden.

Sehr kleinschrittiges Beispiel für die Tafel

Wir lösen das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x + 2y + z &= 8 \\ x + 2y + 2z &= 10 \end{aligned}$$

1. Erweiterte Koeffizientenmatrix aufschreiben:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 10 \end{array}\right)$$

2. x in Zeile 2 eliminieren:

Wir rechnen:

$$Z_2 \leftarrow Z_2 - Z_1$$

Dann erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 10 \end{array}\right)$$

3. x in Zeile 3 eliminieren:

Wir rechnen:

$$Z_3 \leftarrow Z_3 - Z_1$$

Dann erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

4. y in Zeile 3 eliminieren:

Wir rechnen:

$$Z_3 \leftarrow Z_3 - Z_2$$

Dann erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

5. Rückwärtssubstitution:

Aus der dritten Zeile folgt direkt:

$$z = 2$$

Aus der zweiten Zeile folgt direkt:

$$y = 2$$

Einsetzen in die erste Zeile:

$$x + y + z = 6$$
$$x + 2 + 2 = 6$$
$$x + 4 = 6$$
$$x = 2$$

Die Lösung ist also:

$$(x \mid y \mid z) = (2 \mid 2 \mid 2)$$

6. Probe:

Einsetzen in die ursprünglichen Gleichungen:

$$2 + 2 + 2 = 6$$
$$2 + 2 \cdot 2 + 2 = 8$$
$$2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10$$

Alle drei Gleichungen sind erfüllt. Damit ist die Lösung korrekt.

Einführung und curriculare Einordnung

Lineare Gleichungssysteme sind ein zentraler Bestandteil der linearen Algebra. Der Gauß-Algorithmus ist ein grundlegendes Lösungsverfahren, das in vielen Kontexten verwendet wird, z. B. bei der Untersuchung von Geraden und Ebenen, bei Ausgleichsproblemen oder bei der Bestimmung von Schnittpunkten.

Im hessischen Lehrplan und in der gymnasialen Oberstufe gehören das systematische Lösen linearer Gleichungssysteme sowie das sichere Dokumentieren von Rechenwegen zu den grundlegenden Kompetenzen. Die nachfolgenden Aufgaben sind in drei Niveaustufen gegliedert:

- **Niveau A:** direkte Anwendung des Gauß-Algorithmus bei einfachen Systemen mit drei Variablen,
- **Niveau B:** etwas komplexere Systeme mit mehreren Eliminationsschritten,

- **Niveau C:** anspruchsvollere Systeme und eine Modellierungsaufgabe.

Alle Aufgaben dieses Arbeitsblattes besitzen genau eine Lösung. Zudem sind die Gleichungssysteme so gewählt, dass ohne Zeilen- oder Spaltenvertauschung gearbeitet werden kann.

Aufgaben

Niveau A (Grundlagen / AB I)

a) Löse das lineare Gleichungssystem mithilfe des Gauß-Algorithmus:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ y + z &= 5 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

b) Löse das lineare Gleichungssystem mithilfe des Gauß-Algorithmus:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 9 \\ y + z &= 5 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

c) **[Zusatz]** Löse das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 7 \\ x + 2y + z &= 10 \\ x + 2y + 2z &= 12 \end{aligned}$$

Niveau B (Transfer / AB II)

a) Löse das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ x + 3y + 2z &= 13 \\ x + 2y + z &= 8 \end{aligned}$$

b) Löse das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 9 \\ 2x + 3y + z &= 17 \\ x + 2y + 3z &= 20 \end{aligned}$$

c) **[Zusatz]** Löse das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x + 2y - z &= 3 \\ 2x + y + 3z &= 13 \end{aligned}$$

Niveau C (Vertiefung / AB III)

a) Löse das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= -11 \\ 2x - y + z &= 12 \\ 3x + y + z &= 11 \end{aligned}$$

b) **[Modellierung]** Drei Zahlen x, y und z erfüllen die folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 12 \\ 2x + y - z &= 5 \\ x - y + 2z &= 9 \end{aligned}$$

Bestimme die drei Zahlen.

c) **[Zusatz]** Löse das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 17 \\ 2x + y - z &= -4 \\ x + y + z &= 3 \end{aligned}$$

Lösungen

Zu Niveau A

a) Die erweiterte Koeffizientenmatrix lautet:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Die Matrix liegt bereits in Zeilenstufenform. Aus der dritten Zeile folgt:

$$z = 2$$

Einsetzen in die zweite Zeile:

$$y + 2 = 5 \quad \Longrightarrow \quad y = 3$$

Einsetzen in die erste Zeile:

$$x + 3 + 2 = 6 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$$

Die Lösung ist also:

$$(x \mid y \mid z) = (1 \mid 3 \mid 2)$$

b) Die erweiterte Koeffizientenmatrix lautet:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Die Matrix liegt bereits in Zeilenstufenform. Aus der dritten Zeile folgt:

$$z = 3$$

Einsetzen in die zweite Zeile:

$$y + 3 = 5 \quad \Longrightarrow \quad y = 2$$

Einsetzen in die erste Zeile:

$$x + 2 \cdot 2 + 3 = 9 \quad \Longrightarrow \quad x + 4 + 3 = 9 \quad \Longrightarrow \quad x = 2$$

Die Lösung ist also:

$$(x \mid y \mid z) = (2 \mid 2 \mid 3)$$

c) [Zusatz] Die erweiterte Koeffizientenmatrix lautet:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 2 & 12 \end{array}\right)$$

Mit $Z_2 - Z_1$ und $Z_3 - Z_1$ erhält man:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Mit $Z_3 - Z_2$ erhält man:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Aus der dritten Zeile folgt:

$$z = 2$$

Aus der zweiten Zeile folgt direkt:

$$y = 3$$

Einsetzen in die erste Zeile:

$$x + 3 + 2 = 7 \quad \Longrightarrow \quad x = 2$$

Die Lösung ist also:

$$(x \mid y \mid z) = (2 \mid 3 \mid 2)$$

Zu Niveau B

a) Die erweiterte Koeffizientenmatrix lautet:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 13 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

Mit $Z_2 - Z_1$ und $Z_3 - Z_1$ erhält man:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

Aus der dritten Zeile folgt:

$$2z = 8 \quad \Longrightarrow \quad z = 4$$

Einsetzen in die zweite Zeile:

$$y + 3 \cdot 4 = 13 \quad \Longrightarrow \quad y + 12 = 13 \quad \Longrightarrow \quad y = 1$$

Einsetzen in die erste Zeile:

$$x + 2 \cdot 1 - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x + 2 - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 2$$

Die Lösung ist also:

$$(x \mid y \mid z) = (2 \mid 1 \mid 4)$$

b) Die erweiterte Koeffizientenmatrix lautet:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 17 \\ 1 & 2 & 3 & 20 \end{array}\right)$$

Mit $Z_2 - 2Z_1$ und $Z_3 - Z_1$ erhält man:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \end{array}\right)$$

Mit $Z_3 - Z_2$ erhält man:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right)$$

Aus der dritten Zeile folgt:

$$3z = 12 \quad \Longrightarrow \quad z = 4$$

Einsetzen in die zweite Zeile:

$$y - 4 = -1 \quad \Longrightarrow \quad y = 3$$

Einsetzen in die erste Zeile:

$$x + 3 + 4 = 9 \quad \Longrightarrow \quad x = 2$$

Die Lösung ist also:

$$(x \mid y \mid z) = (2 \mid 3 \mid 4)$$

c) [Zusatz] Die erweiterte Koeffizientenmatrix lautet:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 13 \end{array}\right)$$

Mit $Z_2 - Z_1$ und $Z_3 - 2Z_1$ erhält man:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Mit $Z_3 + Z_2$ erhält man:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Aus der dritten Zeile folgt:

$$-z = -2 \quad \Longrightarrow \quad z = 2$$

Einsetzen in die zweite Zeile:

$$y - 2 \cdot 2 = -3 \quad \Longrightarrow \quad y - 4 = -3 \quad \Longrightarrow \quad y = 1$$

Einsetzen in die erste Zeile:

$$x + 1 + 2 = 6 \quad \Longrightarrow \quad x = 3$$

Die Lösung ist also:

$$(x \mid y \mid z) = (3 \mid 1 \mid 2)$$

Zu Niveau C

a) Die erweiterte Koeffizientenmatrix lautet:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -11 \\ 2 & -1 & 1 & 12 \\ 3 & 1 & 1 & 11 \end{array}\right)$$

Mit $Z_2 - 2Z_1$ und $Z_3 - 3Z_1$ erhält man:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -11 \\ 0 & -7 & 5 & 34 \\ 0 & -8 & 7 & 44 \end{array}\right)$$

Durch die zulässige Zeilenoperation $Z_3 \leftarrow 7Z_3 - 8Z_2$ erhält man:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -11 \\ 0 & -7 & 5 & 34 \\ 0 & 0 & 9 & 36 \end{array}\right)$$

Aus der dritten Zeile folgt:

$$9z = 36 \quad \Longrightarrow \quad z = 4$$

Einsetzen in die zweite Zeile:

$$-7y + 5 \cdot 4 = 34 \quad \Longrightarrow \quad -7y + 20 = 34 \quad \Longrightarrow \quad -7y = 14 \quad \Longrightarrow \quad y = -2$$

Einsetzen in die erste Zeile:

$$x + 3(-2) - 2 \cdot 4 = -11 \quad \Longrightarrow \quad x - 6 - 8 = -11 \quad \Longrightarrow \quad x - 14 = -11 \quad \Longrightarrow \quad x = 3$$

Die Lösung ist also:

$$(x \mid y \mid z) = (3 \mid -2 \mid 4)$$

b) Die erweiterte Koeffizientenmatrix lautet:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 9 \end{array}\right)$$

Mit $Z_2 - 2Z_1$ und $Z_3 - Z_1$ erhält man:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & -1 & -3 & -19 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Mit $Z_3 - 2Z_2$ erhält man:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & -1 & -3 & -19 \\ 0 & 0 & 7 & 35 \end{array}\right)$$

Aus der dritten Zeile folgt:

$$7z = 35 \quad \Longrightarrow \quad z = 5$$

Einsetzen in die zweite Zeile:

$$-y - 3 \cdot 5 = -19 \quad \Longrightarrow \quad -y - 15 = -19 \quad \Longrightarrow \quad -y = -4 \quad \Longrightarrow \quad y = 4$$

Einsetzen in die erste Zeile:

$$x + 4 + 5 = 12 \quad \Longrightarrow \quad x = 3$$

Die drei Zahlen sind also:

$$x = 3, \qquad y = 4, \qquad z = 5$$

c) [Zusatz] Die erweiterte Koeffizientenmatrix lautet:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 \\ 2 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Mit $Z_2 - 2Z_1$ und $Z_3 - Z_1$ erhält man:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 \\ 0 & 5 & -7 & -38 \\ 0 & 3 & -2 & -14 \end{array}\right)$$

Durch die zulässige Zeilenoperation $Z_3 \leftarrow 5Z_3 - 3Z_2$ erhält man:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 \\ 0 & 5 & -7 & -38 \\ 0 & 0 & 11 & 44 \end{array}\right)$$

Aus der dritten Zeile folgt:

$$11z = 44 \quad \Longrightarrow \quad z = 4$$

Einsetzen in die zweite Zeile:

$$5y - 7 \cdot 4 = -38 \quad \Longrightarrow \quad 5y - 28 = -38 \quad \Longrightarrow \quad 5y = -10 \quad \Longrightarrow \quad y = -2$$

Einsetzen in die erste Zeile:

$$x - 2(-2) + 3 \cdot 4 = 17 \quad \Longrightarrow \quad x + 4 + 12 = 17 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$$

Die Lösung ist also:

$$(x \mid y \mid z) = (1 \mid -2 \mid 4)$$

Didaktische Hinweise zur Abiturvorbereitung (Hessen)

- Die Aufgabenfolge spiegelt die typische Struktur mit steigendem Anforderungsniveau wider: Niveau A entspricht vorwiegend AB I, Niveau B dem AB II und Niveau C dem AB III.
- Beim Gauß-Algorithmus sollte nicht nur das Endergebnis angegeben werden. Wichtig ist die nachvollziehbare Dokumentation der Zeilenoperationen, z. B. in der Form $Z_2 \leftarrow Z_2 - 2Z_1$.
- Auf diesem Arbeitsblatt wird bewusst auf Zeilen- und Spaltenvertauschungen verzichtet. Die Systeme sind so gewählt, dass die Pivotpositionen direkt geeignet sind.
- Bei Modellierungsaufgaben sollen die Variablen zunächst sinnvoll interpretiert werden. Anschließend ist die rechnerische Lösung auf den Sachzusammenhang zu beziehen.
- Die Probe in den ursprünglichen Gleichungen ist ein wichtiger Bestandteil der Lösung und hilft, Rechenfehler zu erkennen.
- Erweiterungsmöglichkeiten für den Unterricht: LGS mit Parametern, Bestimmung der Anzahl von Lösungen, Zusammenhang mit Determinanten oder Einsatz von CAS zur Kontrolle.