Lineare Gleichungssysteme (3×3)

Lösungen, keine Lösung, unendlich viele Lösungen – Übungsmaterial für die Qualifikationsphase (Q2) – Hessen

Einführung und curriculare Einordnung

Das systematische Lösen linearer Gleichungssysteme (LGS) ist eine **Schlüsselkompetenz** der gymnasialen Oberstufe in Hessen und bildet das algorithmische Fundament für weite Teile der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra.

Verankerung im Kerncurriculum Hessen (KCGO, Ausgabe 2024):

- **Themenfeld Q2.3 (Geraden und Ebenen im Raum):** *„systematisches Lösen von linearen Gleichungssystemen (auch über- und unterbestimmte) ausgehend von konkreten Problemstellungen der Analytischen Geometrie, geometrische Deutung der zugehörigen Lösungsmengen, Auswählen geeigneter Lösungsstrategien“*
- **Themenfeld Q4.2 (Problemlösen und Argumentieren):** *„Lösungsstrategien für lineare Gleichungssysteme, Kategorisierung der möglichen Lösungsmengen (eindeutig, unendlich viele Lösungen, nicht lösbar)“*
- **Kompetenzbereiche:** Mathematisch argumentieren (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), Mit symbolischer/formaler/technischer Sprache umgehen (K2), Mathematische Darstellungen verwenden (K3).

Didaktischer Fokus: Die SuS sollen nicht nur mechanisch den Gauß-Algorithmus anwenden, sondern die **drei möglichen Lösungsfälle** erkennen, die erweiterte Koeffizientenmatrix **geometrisch deuten** (Schnittpunkt / keine gemeinsame Schnittmenge / Schnittgerade bzw. identische Ebenen) und die Lösungsmenge in **Parameterform** angeben können.

Drei ausführliche Beispiele

Beispiel 1: Genau eine Lösung

Gegeben ist das LGS:

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ \text{II:} \quad & 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 19 \\ \text{III:} \quad & -x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{aligned}$$

Schritt 1: Erweiterte Koeffizientenmatrix aufstellen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & 5 & 3 & 19 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Schritt 2: Gauß-Algorithmus (Stufenform herstellen)

$\text{II}' = \text{II} - 2\cdot\ \text{I}$ und $\text{III}' = \text{III} + \text{I}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & -3 & -9 \\ 0 & 3 & 5 & 19 \end{array}\right)$$

$\text{III}'' = \text{III}' - 3\cdot\ \text{II}'$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 14 & 46 \end{array}\right)$$

Schritt 3: Rückwärtseinsetzen

Aus III'': $14\,x_3 = 46 \Rightarrow x_3 = \frac{46}{14} = \frac{23}{7}$

Aus II': $x_2 - 3 \cdot \frac{23}{7} = -9 \Rightarrow x_2 = -9 + \frac{69}{7} = \frac{6}{7}$

Aus I: $x_1 + 2 \cdot \frac{6}{7} + 3 \cdot \frac{23}{7} = 14 \Rightarrow x_1 = 14 - \frac{12}{7} - \frac{69}{7} = \frac{17}{7}$

Ergebnis: Das LGS hat **genau eine Lösung**: $L = \left\{ \begin{pmatrix} 17/7 \\ 6/7 \\ 23/7 \end{pmatrix} \right\}$.

Geometrische Deutung: Die drei Ebenen schneiden sich in einem **eindeutigen Punkt**.

Beispiel 2: Keine Lösung (Widerspruch)

Gegeben ist das LGS:

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ \text{II:} \quad & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 8 \\ \text{III:} \quad & 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 7 \end{aligned}$$

Schritt 1: Erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 8 \\ 3 & 6 & 2 & 7 \end{array}\right)$$

Schritt 2: Gauß-Algorithmus

$\mathrm{II}' = \mathrm{II} - 2\cdot \mathrm{I}$ und $\mathrm{III}' = \mathrm{III} - 3\cdot \mathrm{I}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$\mathrm{III}'' = \mathrm{III}' + \mathrm{II}'$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Achtung – hier liegt ein Sonderfall vor! Wir betrachten die *Spaltenstruktur*: Die zweite Spalte enthält in Zeile 2 und 3 nur Nullen, d. h. x_2 tritt in II' und III'' nicht auf. Wir müssen die **Spalten tauschen**, um eine saubere Stufenform zu erhalten. Tausch von Spalte 2 und Spalte 3 (d. h. Vertauschen der Rollen von x_2 und x_3):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Schritt 3: Analyse

Die letzte Zeile $0 = 0$ ist eine *wahre Aussage* – das LGS ist also **lösbar**! x_2 ist frei wählbar (Parameter t).

Aus Zeile 2: $x_3 = 2$

Aus Zeile 1: $x_1 + 2 + 2x_2 = 3 \Rightarrow x_1 = 1 - 2x_2 = 1 - 2t$

Ergebnis: Das LGS hat **unendlich viele Lösungen**:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

Geometrische Deutung: Die drei Ebenen schneiden sich in einer **gemeinsamen Geraden**.

Hinweis: Dieses Beispiel wurde nachträglich korrigiert – das ursprüngliche LGS hatte einen Widerspruch. Das folgende Beispiel 3 zeigt den echten Widerspruch.

Beispiel 3: Keine Lösung (echter Widerspruch)

Gegeben ist das LGS:

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ \text{II:} \quad & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ \text{III:} \quad & 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9 \end{aligned}$$

Schritt 1: Erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 9 \end{array}\right)$$

Schritt 2: Gauß-Algorithmus

$\text{II}' = \text{II} - 2 \cdot \text{I}$ und $\text{III}' = \text{III} - 3 \cdot \text{I}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$\text{III}'' = \text{III}' - \text{II}'$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Schritt 3: Analyse

Die letzte Zeile lautet: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 2$, also $0 = 2$. Das ist ein **Widerspruch**!

Ergebnis: Das LGS hat **keine Lösung**: $L = \emptyset$.

Geometrische Deutung: Die drei Ebenen haben **keinen gemeinsamen Schnittpunkt**. Mögliche Situationen:

- Zwei Ebenen sind parallel, die dritte schneidet beide (Prisma).
- Alle drei Ebenen sind zueinander parallel.
- Die Ebenen bilden einen „Prismenrumpf“ (Schnittgeraden sind paarweise parallel, aber nicht identisch).

Aufgaben

Niveau A (Grundlagen / AB I)

a) Löse das folgende LGS mit dem Gauß-Algorithmus und gib die Lösungsmenge an:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 13 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 13 \end{aligned}$$

b) Bestimme die Lösungsmenge des LGS:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Gib an, wie viele Lösungen das LGS besitzt, und begründe deine Antwort.

c) Untersuche das folgende LGS auf Lösbarkeit:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

d) **[Zusatz]** Gib zu jedem der drei Fälle (eine Lösung, keine Lösung, unendlich viele Lösungen) je ein eigenes 3×3-LGS an und löse es vollständig.

Niveau B (Transfer / AB II)

a) Die drei Ebenen $E_1 : x_1+2x_2+3x_3 = 6$, $E_2 : 2x_1+4x_2+6x_3 = 12$, $E_3 : x_1+x_2+x_3 = 3$ sind gegeben.

   a) Stelle das zugehörige LGS auf und löse es mit dem Gauß-Algorithmus.

   b) Gib die Lösungsmenge in Parameterform an.

   c) Deute die Lösung geometrisch: Welche Lage haben die drei Ebenen zueinander?

b) Für welchen Wert von $a \in \mathbb{R}$ hat das LGS

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 &= 8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 7 \end{aligned}$$

   a) genau eine Lösung?

   b) keine Lösung?

   c) unendlich viele Lösungen?

   Begründe deine Antwort jeweils mit dem Gauß-Algorithmus.

c) Ein LGS hat die folgende erweiterte Koeffizientenmatrix in Stufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

   a) Wie viele Lösungen hat das LGS?

   b) Gib die Lösungsmenge in Parameterform an.

   c) Welche geometrische Situation beschreibt die Lösungsmenge?

d) **[Zusatz]** Drei Geraden im $\mathbb{R}^3$ sind gegeben durch:

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$g_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Untersuche, ob es einen Punkt gibt, der auf allen drei Geraden liegt.

Niveau C (Vertiefung / AB III)

a) Das LGS

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + ax_3 &= 2 \\ ax_1 + x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

hängt vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ ab.

a) Bestimme für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Anzahl der Lösungen.

b) Gib für $a = -2$ die Lösungsmenge in Parameterform an.

c) Deute die Fälle geometrisch.

b) Beweise: Wenn ein homogenes LGS ($A\vec{x} = \vec{0}$) mit n Gleichungen und n Unbekannten eine von $\vec{0}$ verschiedene Lösung besitzt, dann hat es unendlich viele Lösungen.

c) **[Zusatz]** Ein Unternehmen produziert drei Produkte P_1, P_2, P_3, die auf drei Maschinen M_1, M_2, M_3 bearbeitet werden. Die Maschinenkapazitäten betragen 100, 120 bzw. 80 Stunden pro Woche. Der Bedarf pro Produkteinheit (in Stunden) ist:

	P_1	P_2	P_3
M_1	2	1	3
M_2	1	3	2
M_3	3	2	1

a) Stelle das LGS auf, das die Vollauslastung aller Maschinen beschreibt, und bestimme die Produktionsmengen.

b) Die Maschine M_3 fällt für Wartungsarbeiten aus (Kapazität 0 Stunden). Untersuche, ob eine Vollauslastung von M_1 und M_2 weiterhin möglich ist.

c) Diskutiere den Fall, dass M_2 nur 60 Stunden zur Verfügung hat.

Lösungen

Zu Niveau A

a) Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 13 \\ 3 & 1 & 2 & 13 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-2\text{I},\ \text{III}-3\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}+2\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

Rückwärtseinsetzen: $x_3 = 1$, $x_2 = 1 + 1 = 2$, $x_1 = 6 - 2 - 1 = 3$.
Lösung: $L = \{(3|2|1)\}$.

b) Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & 6 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-2\text{I},\ \text{III}-3\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Die letzte Zeile liefert den Widerspruch $0 = 1$.
Ergebnis: Das LGS hat **keine Lösung** ($L = \emptyset$).

c) Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I}\leftrightarrow\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-2\text{I},\ \text{III}-3\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 5 & -9 & 2 \end{array}\right)$$

III$-\frac{5}{3}\cdot$II:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Rückwärtseinsetzen: $x_3 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1+5\cdot(-\frac{1}{2})}{3} = -\frac{1}{2}$, $x_1 = 1 - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$.
Lösung: $L = \{(-\frac{1}{2}|-\frac{1}{2}|-\frac{1}{2})\}$.

d) [Zusatz] (Musterlösung, eigene Beispiele der SuS können abweichen.)

Zu Niveau B

a) Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-2\text{I},\ \text{III}-\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}\leftrightarrow\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_3 = t$ (frei), $x_2 = 3 - 2t$, $x_1 = 6 - 2(3 - 2t) - 3t = t$.
Lösungsmenge: $L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$.
Geometrische Deutung: E_1 und E_2 sind identisch ($E_2 = 2E_1$), E_3 schneidet beide in einer Geraden.

b) Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & a & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-2\text{I},\ \text{III}-\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a-2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a-2 & 2 \\ 0 & 0 & 6-a & 2 \end{array}\right)$$

a) Für $a \neq 6$: Die letzte Zeile liefert $x_3 = \frac{2}{6-a}$. Das LGS hat **genau eine Lösung**.

b) Für $a = 6$: Die letzte Zeile lautet $0 = 2$ (Widerspruch). Das LGS hat **keine Lösung**.

c) Da der Fall $0 = 0$ nie auftritt, gibt es **kein** a, für das das LGS unendlich viele Lösungen hat.

c)

a) Die letzte Zeile $0 = 0$ ist wahr, x_2 ist frei wählbar. Das LGS hat **unendlich viele Lösungen**.

b) $x_2 = t$, $x_3 = 2$, $x_1 = 4 - 2t + 2 = 6 - 2t$.
$L = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$.

c) Die Lösungsmenge beschreibt eine **Gerade** im $\mathbb{R}^3$.

d) [Zusatz] Ansatz: Punkt P liegt auf allen drei Geraden $\Leftrightarrow$ es existieren $s, t, u \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gleichsetzen von g_1 und g_2:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-\text{I},\ \text{III}-\text{I}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Zeile II liefert den Widerspruch $0 = 2$.
Ergebnis: Es gibt **keinen** Punkt, der auf allen drei Geraden liegt.

Zu Niveau C

a) Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & a & 2 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-\text{I},\ \text{III}-a\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 2 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 2-2a \end{array}\right)$$

Fallunterscheidung:

Fall 1: $a \neq 1$ und $a \neq -1$: Dann ist $1-a \neq 0$ und $1-a^2 \neq 0$.
III$-\frac{1-a^2}{1-a}\cdot$II = III$-(1+a)\cdot$II:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 2 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)-(1+a)(a-1) & (2-2a)-0 \end{array}\right)$$

Die Position (3,3) ist $(1-a)+(1+a)(1-a) = (1-a)(1+1+a) = (1-a)(2+a)$.
Für $a \neq -2$ und $a \neq \pm 1$: **genau eine Lösung**.
Für $a = -2$: letzte Zeile $0 = 6$ (Widerspruch) $\Rightarrow$ **keine Lösung**.

Fall 2: $a = 1$: Alle drei Gleichungen lauten $x_1 + x_2 + x_3 = 2$.
$\Rightarrow$ **unendlich viele Lösungen** (zwei Freiheitsgrade).

Fall 3: $a = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Letzte Zeile: $0 = 4$ (Widerspruch) $\Rightarrow$ **keine Lösung**.

Zusammenfassung:

- $a = 1$: unendlich viele Lösungen (zwei Freiheitsgrade)
- $a = -1$ oder $a = -2$: keine Lösung
- sonst ($a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 1\}$): genau eine Lösung

b) Für $a = -2$: (siehe Fall $a = -2$ oben) $\Rightarrow$ keine Lösung.
Korrektur: Für den Aufgabenteil b) wählen wir $a = 1$:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

c) Geometrische Deutung:

- $a = 1$: Drei identische Ebenen.
- $a = -1$: Zwei Ebenen schneiden sich in einer Geraden, die dritte ist parallel zu dieser Schnittgeraden (Prisma).
- $a = -2$: Analog, Prismenfall.
- sonst: Drei Ebenen schneiden sich in einem eindeutigen Punkt.

2) *Beweis:* Sei $\vec{x}_0 \neq \vec{0}$ eine Lösung von $A\vec{x} = \vec{0}$. Dann ist für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ auch $\lambda\vec{x}_0$ eine Lösung, denn $A(\lambda\vec{x}_0) = \lambda(A\vec{x}_0) = \lambda\vec{0} = \vec{0}$. Da es unendlich viele $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, gibt es unendlich viele Lösungen. $\square$

3) [Zusatz]

a) LGS:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 100 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 120 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 80 \end{aligned}$$

Lösung (mit Gauß-Algorithmus): $x_1 = 10$, $x_2 = 20$, $x_3 = 20$.
Ergebnis: 10 Einheiten P_1, 20 Einheiten P_2, 20 Einheiten P_3.

b) Neues LGS (mit M_3-Kapazität 0):

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 100 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 120 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Da Produktionsmengen $x_i \geq 0$ sein müssen, die dritte Gleichung aber $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ fordert, ist die einzige nicht-negative Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Dann sind aber M_1 und M_2 nicht voll ausgelastet.
Ergebnis: Eine Vollauslastung von M_1 und M_2 ist bei M_3-Ausfall **nicht möglich**.

c) Neues LGS:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 100 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 60 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 80 \end{aligned}$$

Mit Gauß:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 100 \\ 1 & 3 & 2 & 60 \\ 3 & 2 & 1 & 80 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 60 \\ 0 & -5 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -\frac{28}{5} & -\frac{140}{5} \end{array}\right)$$

$x_3 = 5$, $x_2 = 5$, $x_1 = 25$.
Ergebnis: 25 Einheiten P_1, 5 Einheiten P_2, 5 Einheiten P_3.

Didaktische Hinweise

- Die Aufgabenfolge orientiert sich an den **Anforderungsbereichen** des hessischen Kerncurriculums: AB I (reproduzieren), AB II (zusammenhängende Anwendung/Transfer), AB III (reflektieren/begründen/verallgemeinern).
- **Binnendifferenzierung:** Die drei Niveaustufen ermöglichen eine natürliche Differenzierung. Niveau A ist für alle SuS verpflichtend, Niveau B für leistungsfähigere SuS, Niveau C als Herausforderung für den LK oder besonders starke GK-SuS.
- **Hilfsmittel:** Der Gauß-Algorithmus sollte handschriftlich durchgeführt werden. Ein CAS darf zur **Kontrolle** eingesetzt werden, ersetzt aber nicht den Rechenweg (OA-VO §13).

- **Geometrische Deutung:** Die SuS sollen stets die **Lage der Ebenen** im Raum mitdenken. Dies fördert das räumliche Vorstellungsvermögen und verbindet Lineare Algebra mit Analytischer Geometrie.
- **Typische Fehlerquellen:**
  - Vorzeichenfehler beim Gauß-Algorithmus
  - Vergessen des Rückwärtseinsetzens
  - Falsche Interpretation der Zeile $0 = 0$ (wahr, nicht „keine Lösung“!)
  - Verwechslung von „keine Lösung“ und „unendlich viele Lösungen“