Extrema und Wendepunkte ohne Differentialrechnung

Arbeitsblatt 1 - Beispiel mit Lösungen

Beispielfunktion: $f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) + 1$

Unser Algorithmus - Schritt für Schritt:

Schritt 1: Verschiebungen bestimmen

- x-Verschiebung: $d_x = 1$ (nach rechts)
- y-Verschiebung: $d_y = 1$ (nach oben)
- $\Rightarrow$ Mittellinie bei $y = 1$

Lösung: Die Funktion ist um 1 Einheit nach rechts und 1 Einheit nach oben verschoben. Die Mittellinie verläuft bei $y = 1$.

Schritt 2: Periodenlänge bestimmen

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

Lösung: Die Periodenlänge beträgt $T = 4$. Das bedeutet, die Funktion wiederholt sich alle 4 Einheiten.

Schritt 3: Amplitude bestimmen

$$A = 2$$

Lösung: Die Amplitude ist $A = 2$. Die Funktion schwankt also um ± 2 Einheiten um die Mittellinie.

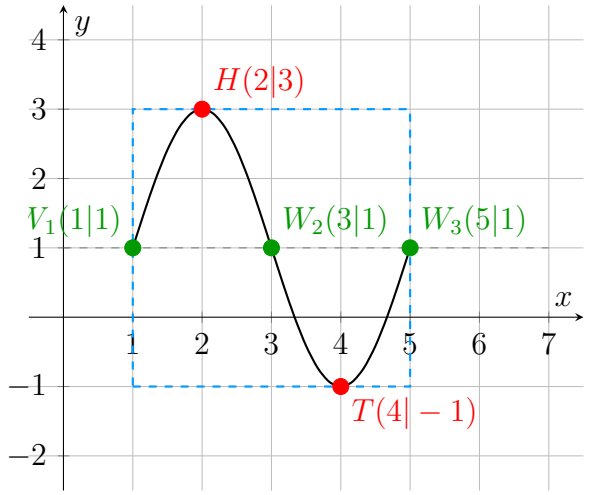
Schritt 4: Rechteck zeichnen

- x-Bereich: 1 bis 5 (Länge = Periodenlänge $T = 4$)
- y-Bereich: -1 bis 3 (Mittellinie $\pm$ Amplitude: 1 ± 2)

Lösung: Das Rechteck hat die Eckpunkte:

- Unten links: $(1|-1)$
- Oben rechts: $(5|3)$

Schritt 5: Graph skizzieren



Lösung: Der Graph beginnt bei $(1|1)$ auf der Mittellinie, steigt zum Hochpunkt $(2|3)$, fällt durch $(3|1)$ zum Tiefpunkt $(4|-1)$ und steigt wieder zu $(5|1)$.

Schritt 6: Extrema und Wendepunkte im skizzierten Bereich ablesen

Lösung:Extrema:

- Hochpunkt: $H(2|3)$
- Tiefpunkt: $T(4|-1)$

Wendepunkte (Schnittpunkte mit der Mittellinie):

- $W_1(1|1)$
- $W_2(3|1)$
- $W_3(5|1)$

Schritt 7: Alle Extrema und Wendepunkte bestimmen (periodisch fortsetzen)

Lösung:Wichtig:

- Extrema wiederholen sich nach einer **vollen Periodenlänge** $T = 4$
- Wendepunkte wiederholen sich nach einer **halben Periodenlänge** $\frac{T}{2} = 2$

Alle Hochpunkte:

$$H(2 + 4k \mid 3) \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

Beispiele: $H(2|3)$, $H(6|3)$, $H(10|3)$, $H(-2|3)$, ...

Alle Tiefpunkte:

$$T(4+4k \mid -1) \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

Beispiele: $T(4|-1)$, $T(8|-1)$, $T(12|-1)$, $T(0|-1)$, ...

Alle Wendepunkte:

$$W(1+2k \mid 1) \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

Beispiele: $W(1|1)$, $W(3|1)$, $W(5|1)$, $W(7|1)$, $W(-1|1)$, ...

Allgemeine Schreibweise aller besonderen Punkte

Kompakte Darstellung aller Extrema und Wendepunkte:

Extrema (Hoch- und Tiefpunkte)

Alle Extrema lassen sich zusammenfassen als:

$$E_{\text{ext}}\left(2+2a \mid 3-4\cdot(a \bmod 2)\right) \quad \text{mit } a \in \mathbb{Z}$$

Oder getrennt nach Hoch- und Tiefpunkten:

Hochpunkte:

$$H\left(2+4a \mid 3\right) \quad \text{mit } a \in \mathbb{Z}$$

Tiefpunkte:

$$T\left(4+4a \mid -1\right) \quad \text{mit } a \in \mathbb{Z}$$

Wendepunkte

Alle Wendepunkte:

$$W\left(1+2a \mid 1\right) \quad \text{mit } a \in \mathbb{Z}$$

Vereinheitlichte Schreibweise

Alle besonderen Punkte der Funktion $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)+1$**:**

Extrema: $E\left(2+2a \mid 1+2\cdot(-1)^a\right)$ mit $a \in \mathbb{Z}$
wobei:

- für **gerade** a: Hochpunkt $H(2+2a \mid 3)$
- für **ungerade** a: Tiefpunkt $T(2+2a \mid -1)$

Wendepunkte: $W(1+2a \mid 1)$ mit $a \in \mathbb{Z}$

Beispiele für die allgemeine Schreibweise

Punkttyp	**Allgemeine Form**	**Beispiel (a)**	**Koordinaten**
Hochpunkt	$H(2+4a\|3)$	$a=0$	$H(2\|3)$
Hochpunkt	$H(2+4a\|3)$	$a=1$	$H(6\|3)$
Hochpunkt	$H(2+4a\|3)$	$a=-1$	$H(-2\|3)$
Tiefpunkt	$T(4+4a\|-1)$	$a=0$	$T(4\|-1)$
Tiefpunkt	$T(4+4a\|-1)$	$a=1$	$T(8\|-1)$
Tiefpunkt	$T(4+4a\|-1)$	$a=-1$	$T(0\|-1)$
Wendepunkt	$W(1+2a\|1)$	$a=0$	$W(1\|1)$
Wendepunkt	$W(1+2a\|1)$	$a=1$	$W(3\|1)$
Wendepunkt	$W(1+2a\|1)$	$a=2$	$W(5\|1)$
Wendepunkt	$W(1+2a\|1)$	$a=-1$	$W(-1\|1)$

Merke: Durch die allgemeine Schreibweise mit $a \in \mathbb{Z}$ können wir **alle** besonderen Punkte der periodischen Funktion mit nur einer Formel beschreiben!