Nullstellen trigonometrischer Funktionen berechnen

Erarbeitung und Übung für die Qualifikationsphase (Q1) – Hessen

A. Erarbeitung: Das „Kochrezept“ für Nullstellen (Gruppenarbeit)

Um die Nullstellen einer Funktion der Form $f(x) = a \cdot \sin(b(x-d)) + c$ zu berechnen, lösen wir die Gleichung $f(x) = 0$. Da trigonometrische Funktionen periodisch sind, gibt es (meist) unendlich viele Lösungen.

Schritt 1: Gleichung aufstellen und Term isolieren: Setze $f(x) = 0$ und forme so um, dass der Sinus- oder Kosinus-Term allein auf einer Seite steht:

$$\sin(b(x-d)) = -\frac{c}{a}$$

Schritt 2: Existenz der Lösungen prüfen: Der Wertebereich von Sinus und Kosinus ist $[-1, 1]$. Gilt $\left|-\frac{c}{a}\right| > 1$, gibt es **keine** Nullstellen.

Schritt 3: Hauptlösung berechnen: Wende die Umkehrfunktion arcsin (bzw. arccos) an, um den Winkel im inneren Term zu finden. (Taschenrechner muss auf **RAD** stehen!)

$$b(x_1 - d) = \arcsin\left(-\frac{c}{a}\right)$$

Löse diese Gleichung nach x_1 auf.

Schritt 4: Zweite Lösung im Intervall finden (Symmetrie): Der Sinus ist symmetrisch zur Mitte seiner Halbperiode. Die zweite Lösung x_2 im gleichen Periodenintervall erhält man durch:

$$b(x_2 - d) = \pi - \arcsin\left(-\frac{c}{a}\right)$$

Löse nach x_2 auf. (Bei Kosinus nutzt man die Symmetrie $2\pi - \arccos(\dots)$).

Schritt 5: Allgemeine Lösung aufschreiben: Addiere zur Hauptlösung und zur zweiten Lösung beliebige Vielfache der Periodenlänge $T = \frac{2\pi}{b}$:

$$x = x_1 + k \cdot T \quad \text{und} \quad x = x_2 + k \cdot T \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

Beispiel für die Tafel

Bestimme alle Nullstellen von $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) + 1$.

1. Isolieren: $2\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = -1 \implies \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = -0{,}5$

2. Prüfen: $|-0{,}5| \leq 1 \implies$ Lösungen existieren.

3. Hauptlösung: $\frac{\pi}{2}(x_1-1) = \arcsin(-0{,}5) = -\frac{\pi}{6} \implies x_1 - 1 = -\frac{1}{3} \implies x_1 = \frac{2}{3}$

4. Zweite Lösung: $\frac{\pi}{2}(x_2-1) = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7\pi}{6} \implies x_2 - 1 = \frac{7}{3} \implies x_2 = \frac{10}{3}$

5. Allgemein: Periodenlänge $T = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4$.

$$x = \frac{2}{3} + 4k \quad \text{und} \quad x = \frac{10}{3} + 4k \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

B. Eigenständiges Üben

Niveau A (Grundlagen / AB I)

a) Bestimme alle Nullstellen von $f(x) = \sin(x) - \frac{1}{2}$.

b) Bestimme alle Nullstellen von $f(x) = \cos(2x)$.

c) **[Zusatz]** Prüfe, ob $f(x) = 3\sin(x) + 4$ Nullstellen besitzt.

Niveau B (Transfer / AB II)

a) Bestimme alle Nullstellen von $f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}$.

b) Bestimme alle Nullstellen von $f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$ im Intervall $[0, 4\pi]$.

c) **[Zusatz]** Gegeben ist $f(x) = \sin(2x) - \cos(2x)$. Forme um (Tipp: $\sin(2x) = \cos(2x)$) und bestimme die Nullstellen.

Niveau C (Vertiefung / AB III)

a) Bestimme alle Nullstellen von $f(x) = -2\sin\left(\frac{\pi}{3}(x+1)\right) + 1$.

b) **[Modellierung]** Der Wasserstand in einem Hafen wird durch $h(t) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 5$ beschrieben (t in Stunden, h in Metern). Ein Schiff benötigt mindestens 6 Meter Wassertiefe. Bestimme die Zeitintervalle innerhalb der ersten 24 Stunden, in denen das Schiff *keinen* Hafen anlaufen kann (also $h(t) < 6$).

c) **[Zusatz]** Für welchen Parameter c hat die Funktion $f(x) = 2\sin(x) + c$ genau dann keine Nullstellen?

Lösungen

Zu Niveau A

a) $\sin(x) = 0{,}5 \implies x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{5\pi}{6}$. Allgemein: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ und $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. **b)** $\cos(2x) = 0 \implies 2x_1 = \frac{\pi}{2}, 2x_2 = \frac{3\pi}{2} \implies x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{3\pi}{4}$. Periodenlänge $T = \pi$. Allgemein: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ und $x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$. **c)** $\sin(x) = -\frac{4}{3}$. Da $|-\frac{4}{3}| > 1$, gibt es **keine** Nullstellen.

Zu Niveau B

a) $\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies x_1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \implies x_1 = \frac{\pi}{2}$. Zweite Lösung: $x_2 - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \implies x_2 = \pi$. Allgemein: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ und $x = \pi + 2\pi k$. **b)** $\cos(\frac{1}{2}x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \implies \frac{1}{2}x_1 = \frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}x_2 = \frac{7\pi}{6} \implies x_1 = \frac{5\pi}{3}, x_2 = \frac{7\pi}{3}$. $T = 4\pi$. Im Intervall $[0, 4\pi]$: $x \in \{\frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\}$. **c)** $\sin(2x) = \cos(2x) \implies \tan(2x) = 1 \implies 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k \implies x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k$.

Zu Niveau C

a) $\sin(\frac{\pi}{3}(x+1)) = 0{,}5 \implies \frac{\pi}{3}(x_1 + 1) = \frac{\pi}{6} \implies x_1 = -0{,}5$. Zweite: $\frac{\pi}{3}(x_2 + 1) = \frac{5\pi}{6} \implies x_2 = 1{,}5$. $T = 6$. Allgemein: $x = -0{,}5 + 6k$ und $x = 1{,}5 + 6k$. **b)** Gesucht: $h(t) < 6 \implies 2\sin(\frac{\pi}{6}t) + 5 < 6 \implies \sin(\frac{\pi}{6}t) < 0{,}5$. Grenzen: $\frac{\pi}{6}t_1 = \frac{\pi}{6} \implies t_1 = 1$; $\frac{\pi}{6}t_2 = \frac{5\pi}{6} \implies t_2 = 5$. Da der Sinus zwischen diesen Werten größer als 0,5 ist, ist er *kleiner* als 0,5 im Rest der Periode ($T = 12$). Das Schiff kann nicht anlaufen in $t \in (5, 13)$ und $t \in (17, 24]$. **c)** $2\sin(x) = -c \implies \sin(x) = -\frac{c}{2}$. Keine Lösungen, wenn $|-\frac{c}{2}| > 1 \implies |c| > 2$. Also für $c > 2$ oder $c < -2$.

Didaktische Hinweise

- Der Fokus liegt auf dem Verständnis der **Symmetrie** der trigonometrischen Funktionen. Die zweite Lösung pro Periode wird oft vergessen.
- Bei der Modellierungsaufgabe (C.b) ist das Zeichnen einer Skizze essenziell, um zu erkennen, in welchem Intervall die Ungleichung erfüllt ist.
- Der Taschenrechner muss zwingend auf **RAD** (Bogenmaß) eingestellt sein.