Tafelbild: Besondere Lineare Gleichungssysteme

Teil 1: Überbestimmte LGS

*Definition: Es gibt **mehr** Gleichungen als Variablen. (Zu viele Regeln!)*

Beispiel 1: Der Widerspruch (Keine Lösung)

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad & x + y = 5 \\ \text{II:} \quad & x - y = 1 \\ \text{III:} \quad & x + y = 10 \end{aligned}$$

Beobachtung: Aus I und II folgt eindeutig $x = 3$ und $y = 2$.
Probe mit III: $3 + 2 = 5$, aber die Gleichung verlangt 10. **Widerspruch!**
$\Rightarrow$ **Lösung:** $L = \{\}$ (Keine Lösung).

Beispiel 2: Die Wiederholung (Eindeutige Lösung)

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad & x + y = 5 \\ \text{II:} \quad & x - y = 1 \\ \text{III:} \quad & 2x + 2y = 10 \end{aligned}$$

Beobachtung: Gleichung III ist einfach nur Gleichung I mal 2. Sie bringt **keine neue Information**.
$\Rightarrow$ **Lösung:** $L = \{(3 \mid 2)\}$ (Die „zu vielen“ Gleichungen waren nur überflüssig).

Teil 2: Unterbestimmte LGS

*Definition: Es gibt **weniger** Gleichungen als Variablen. (Zu wenige Regeln!)*

Die Grundidee: Da uns eine Gleichung fehlt, können wir nicht alle Variablen eindeutig berechnen. Es gibt **unendlich viele Lösungen**. *Der Trick:* Wir ersetzen einfach eine Variable durch einen **Parameter** t. Dadurch wird aus dem unterbestimmten System wieder ein ganz normales, lösbares LGS!

Rechenbeispiel (Schritt für Schritt):

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad & x + y + z = 6 \\ \text{II:} \quad & y + z = 4 \end{aligned}$$

Schritt 1: Parameter einführen
Wir entscheiden uns, die Variable z durch den Parameter t zu ersetzen.
$\Rightarrow$ Wir setzen: $z = t \quad$ (für alle $t \in \mathbb{R}$)

Schritt 2: Gewohntes LGS lösen
Wir setzen $z = t$ in unsere Gleichungen ein:

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad & x + y + t = 6 \quad \Rightarrow \quad x + y = 6 - t \\ \text{II:} \quad & y + t = 4 \quad \Rightarrow \quad y = 4 - t \end{aligned}$$

Aus Gleichung II kennen wir jetzt schon y. Das setzen wir in Gleichung I ein:
$x + (4 - t) = 6 - t$
$x + 4 = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

Ergebnis (Lösungsmenge):
Wir haben alle drei Variablen bestimmt ($x = 2$, $y = 4 - t$, $z = t$). Wir schreiben das als Vektor:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 - t \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Geometrische Deutung (im $\mathbb{R}^3$):
Jede Gleichung ist eine Ebene. Zwei Ebenen, die sich schneiden, ergeben eine **Schnittgerade**. Eine Gerade besteht aus unendlich vielen Punkten $\Rightarrow$ unendlich viele Lösungen.