Nullstellen trigonometrischer Funktionen berechnen

Übungsmaterial für die Qualifikationsphase (Q1) – Hessen

Erklärung: Das Kochrezept für Nullstellen

Um die Nullstellen einer Funktion der Form $f(x) = a \cdot \sin(b(x-d)) + c$ zu berechnen, gehst du systematisch vor:

Schritt-für-Schritt-Anleitung

Schritt 1: Gleichung aufstellen
Setze $f(x) = 0$ und forme um, bis der Sinus- oder Kosinus-Term allein steht:

$$a \cdot \sin(b(x-d)) + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sin(b(x-d)) = -\frac{c}{a}$$

Schritt 2: Existenz prüfen
Der Wertebereich von Sinus und Kosinus ist $[-1, 1]$. Gilt $\left|-\frac{c}{a}\right| > 1$, gibt es **keine** Nullstellen!

Schritt 3: Hauptlösung berechnen
Wende die Umkehrfunktion an (Taschenrechner auf **RAD**!):

$$b(x_1 - d) = \arcsin\left(-\frac{c}{a}\right)$$

Löse nach x_1 auf.

Schritt 4: Zweite Lösung finden (Symmetrie)

- Bei **Sinus**: $b(x_2 - d) = \pi - \arcsin\left(-\frac{c}{a}\right)$
- Bei **Kosinus**: $b(x_2 - d) = -\arccos\left(-\frac{c}{a}\right)$ (oder $2\pi - \arccos(...)$)

Löse nach x_2 auf.

Schritt 5: Allgemeine Lösung aufschreiben
Bestimme die Periodenlänge $T = \frac{2\pi}{b}$ und addiere beliebige Vielfache davon:

$$x = x_1 + k \cdot T \quad \text{und} \quad x = x_2 + k \cdot T \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

Ausführliches Beispiel

Aufgabe: Bestimme alle Nullstellen von $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) + 1$.

Lösung:

Schritt 1: Gleichung aufstellen und isolieren

$$2\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) + 1 = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) = -\frac{1}{2}$$

Schritt 2: Existenz prüfen
$\left|-\frac{1}{2}\right| = 0{,}5 \leq 1 \Rightarrow$ Lösungen existieren!

Schritt 3: Hauptlösung berechnen (TR auf RAD!)

$$\frac{\pi}{2}(x_1 - 1) = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

$$x_1 - 1 = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{2}{3}$$

Schritt 4: Zweite Lösung (Sinus-Symmetrie)

$$\frac{\pi}{2}(x_2 - 1) = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7\pi}{6}$$

$$x_2 - 1 = \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{10}{3}$$

Schritt 5: Allgemeine Lösung
Periodenlänge: $T = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4$

$$\boxed{x = \frac{2}{3} + 4k \quad \text{und} \quad x = \frac{10}{3} + 4k, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Einführung und curriculare Einordnung

Die Berechnung von Nullstellen trigonometrischer Funktionen ist eine grundlegende Kompetenz in der Analysis der Qualifikationsphase. Im **Hessischen Kerncurriculum (KC-GO)** wird dies im Inhaltsbereich „Analysis"verortet und gehört zu den zentralen Anforderungen des Grund- und Leistungskurses.

Die Fähigkeit, trigonometrische Gleichungen systematisch zu lösen, ist nicht nur für die Kurvendiskussion periodischer Funktionen wichtig, sondern auch für Anwendungen in der Physik (z. B. Schwingungen, Wellen) und bei der Modellierung realer Phänomene.

Die nachfolgenden Aufgaben sind in drei Niveaustufen gegliedert:

- **Niveau A:** Einfache Funktionen ohne oder mit einfacher Verschiebung

- **Niveau B:** Funktionen mit komplexeren Parametern und gebrochenen Periodenlängen
- **Niveau C:** Anspruchsvolle Aufgaben mit Modellierung und Transfer

---

Aufgaben

Niveau A (Grundlagen / Anforderungsbereich I)

a) Bestimme alle Nullstellen von $f(x) = \sin(x)$.

b) Bestimme alle Nullstellen von $f(x) = \cos(x) - \frac{1}{2}$.

c) Bestimme alle Nullstellen von $f(x) = 2\sin(x) + 1$.

d) **[Zusatz]** Prüfe, ob $f(x) = 3\sin(x) + 4$ Nullstellen besitzt.

Niveau B (Transfer / Anforderungsbereich II)

a) Bestimme alle Nullstellen von $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

b) Bestimme alle Nullstellen von $f(x) = 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \sqrt{2}$.

c) Bestimme alle Nullstellen von $f(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}(x+2)\right) - \frac{3}{2}$.

d) **[Zusatz]** Bestimme alle Nullstellen von $f(x) = \sin(2x) - \cos(2x)$ im Intervall $[0, 2\pi]$.

Niveau C (Vertiefung / Anforderungsbereich III)

a) Bestimme alle Nullstellen von $f(x) = -2\sin\left(\frac{\pi}{3}(x-1)\right) + 1$.

b) **[Modellierung]** Die Wassertiefe in einem Hafen wird durch $h(t) = 3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 5$ beschrieben (t in Stunden, h in Metern). Bestimme alle Zeitpunkte, zu denen die Wassertiefe genau 6,5 Meter beträgt.

c) Gegeben ist $f(x) = a \cdot \sin(b(x-d)) + c$ mit $a > 0$. Die Funktion hat die Nullstellen $x = 1 + 6k$ und $x = 4 + 6k$ ($k \in \mathbb{Z}$), die Mittellinie $y = 2$ und die Amplitude 3. Bestimme die Parameter a, b, c und d (mit $0 \leq d < T$).

d) **[Zusatz]** Für welche Werte des Parameters c hat die Funktion $f(x) = 2\sin(x) + c$

i) keine Nullstellen?

ii) genau eine Nullstelle pro Periode?

iii) zwei Nullstellen pro Periode?

Lösungen

Zu Niveau A

a) $\sin(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \pi$. Periodenlänge $T = 2\pi$.
Allgemein: $x = 0 + 2\pi k = 2\pi k$ und $x = \pi + 2\pi k$.
Vereinfacht: $x = \pi k$ **mit** $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\cos(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{3}, x_2 = -\frac{\pi}{3}$ (oder $\frac{5\pi}{3}$).
Allgemein: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ **und** $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ **mit** $k \in \mathbb{Z}$.

c) $2\sin(x) = -1 \Rightarrow \sin(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = -\frac{\pi}{6}, x_2 = \pi - (-\frac{\pi}{6}) = \frac{7\pi}{6}$.
Allgemein: $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ **und** $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$ **mit** $k \in \mathbb{Z}$.

d) [Zusatz] $3\sin(x) = -4 \Rightarrow \sin(x) = -\frac{4}{3}$.
Da $\left|-\frac{4}{3}\right| > 1$, gibt es **keine Nullstellen**.

Zu Niveau B

a) $\sin(2x - \frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = 0$ oder $2x - \frac{\pi}{3} = \pi$.
$x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{2\pi}{3}$. Periodenlänge $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.
Allgemein: $x = \frac{\pi}{6} + \pi k$ **und** $x = \frac{2\pi}{3} + \pi k$ **mit** $k \in \mathbb{Z}$.

b) $2\cos(\frac{1}{2}x) = \sqrt{2} \Rightarrow \cos(\frac{1}{2}x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
$\frac{1}{2}x_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}$.
$\frac{1}{2}x_2 = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow x_2 = -\frac{\pi}{2}$.
Periodenlänge $T = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$.
Allgemein: $x = \frac{\pi}{2} + 4\pi k$ **und** $x = -\frac{\pi}{2} + 4\pi k$ **mit** $k \in \mathbb{Z}$.

c) $3\sin(\frac{\pi}{4}(x+2)) = \frac{3}{2} \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{4}(x+2)) = \frac{1}{2}$.
$\frac{\pi}{4}(x_1+2) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x_1 + 2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x_1 = -\frac{4}{3}$.
$\frac{\pi}{4}(x_2+2) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x_2 + 2 = \frac{10}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{4}{3}$.
Periodenlänge $T = \frac{2\pi}{\pi/4} = 8$.
Allgemein: $x = -\frac{4}{3} + 8k$ **und** $x = \frac{4}{3} + 8k$ **mit** $k \in \mathbb{Z}$.

d) [Zusatz] $\sin(2x) = \cos(2x) \Rightarrow \tan(2x) = 1$.
$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k$.
Im Intervall $[0, 2\pi]$: $x \in \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}\right\}$.

Zu Niveau C

a) $-2\sin(\frac{\pi}{3}(x-1)) = -1 \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{3}(x-1)) = \frac{1}{2}$.
$\frac{\pi}{3}(x_1-1) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x_1 - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}$.
$\frac{\pi}{3}(x_2-1) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x_2 - 1 = \frac{5}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{7}{2}$.
Periodenlänge $T = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6$.
Allgemein: $x = \frac{3}{2} + 6k$ **und** $x = \frac{7}{2} + 6k$ **mit** $k \in \mathbb{Z}$.

b) [Modellierung] $h(t) = 6{,}5 \Rightarrow 3\sin(\frac{\pi}{6}t) + 5 = 6{,}5$.
$\sin(\frac{\pi}{6}t) = 0{,}5$.
$\frac{\pi}{6}t_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_1 = 1$.

$\frac{\pi}{6}t_2 = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow t_2 = 5$.
Periodenlänge $T = \frac{2\pi}{\pi/6} = 12$.
Allgemein: $t = 1 + 12k$ **und** $t = 5 + 12k$ **mit** $k \in \mathbb{Z}$.
Das bedeutet: Nach 1 Stunde und nach 5 Stunden (und dann alle 12 Stunden wieder).

c) Aus den Nullstellen folgt: Periodenlänge $T = 6 \Rightarrow b = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.
Mittellinie $y = 2 \Rightarrow c = 2$.
Amplitude $a = 3$.
Die Nullstellen liegen symmetrisch um den Wendepunkt. Der Mittelpunkt zwischen $x = 1$ und $x = 4$ ist $x = 2{,}5$.
Da es sich um eine Sinusfunktion handelt und die erste Nullstelle bei $x = 1$ liegt, muss die Verschiebung so sein, dass der Graph bei $x = 1$ die Mittellinie schneidet.
Der „normaleSSinus schneidet bei $x = 0$ die Mittellinie. Also: $d = 1$.
Lösung: $a = 3$, $b = \frac{\pi}{3}$, $c = 2$, $d = 1$.

d) [Zusatz] $2\sin(x) + c = 0 \Rightarrow \sin(x) = -\frac{c}{2}$.

i) Keine Nullstellen: $\left|-\frac{c}{2}\right| > 1 \Rightarrow |c| > 2$. Also: $c > 2$ **oder** $c < -2$.

ii) Genau eine Nullstelle pro Periode: $\left|-\frac{c}{2}\right| = 1 \Rightarrow c = \pm 2$. Also: $c = 2$ **oder** $c = -2$.

iii) Zwei Nullstellen pro Periode: $\left|-\frac{c}{2}\right| < 1 \Rightarrow |c| < 2$. Also: $-2 < c < 2$.

Didaktische Hinweise

- **Taschenrechner:** Der TR muss zwingend auf **RAD** (Bogenmaß) eingestellt sein!
- **Symmetrie verstehen:** Die zweite Lösung wird oft vergessen. Visualisierung am Graphen hilft!
- **Allgemeine Lösung:** Die Periodizität muss immer berücksichtigt werden ($+k \cdot T$).
- **Sonderfälle:** Bei $|c| = 1$ gibt es nur eine Lösung pro Periode (am Hoch- oder Tiefpunkt).
- **Modellierung:** Bei Anwendungsaufgaben immer die Einheiten und den Sachzusammenhang beachten!