Extrema und Wendepunkte trigonometrischer Funktionen ohne Differentialrechnung

Übungsmaterial für die Qualifikationsphase (Q1) – Hessen

Mathematisches „Kochrezept“ für den Rechteck-Algorithmus

Der Rechteck-Algorithmus ist ein systematisches Verfahren, um den Graphen einer trigonometrischen Funktion zu skizzieren und ihre besonderen Punkte (Extrema und Wendepunkte) ohne Differentialrechnung zu bestimmen. Auf diesem Arbeitsblatt wird bewusst auf das formale Ableiten verzichtet, um ein tiefes intuitives Verständnis für die Periodizität aufzubauen.

Schritt 1: Verschiebungen bestimmen: Aus dem Funktionsterm $f(x) = a \cdot \sin(b(x - d)) + c$ werden die Verschiebungen abgelesen. Die y-Verschiebung c gibt die Lage der **Mittellinie** an.

Schritt 2: Periodenlänge bestimmen: Die Periodenlänge T wird über den Faktor b berechnet: $T = \frac{2\pi}{b}$. Sie gibt an, nach welcher x-Länge sich der Graph wiederholt.

Schritt 3: Amplitude bestimmen: Die Amplitude $A = |a|$ gibt den maximalen Ausschlag des Graphen von der Mittellinie nach oben und unten an.

Schritt 4: Rechteck zeichnen: Ein Rechteck wird gezeichnet, das genau eine vollständige Periode enthält.

- x-Bereich: von der x-Verschiebung d bis $d + T$.
- y-Bereich: von $c - A$ bis $c + A$.

Schritt 5: Graph skizzieren: Innerhalb des Rechtecks wird der Graph skizziert. Bei einer positiven Sinusfunktion startet man auf der Mittellinie, geht zum Hochpunkt (oben), durch die Mittellinie zum Tiefpunkt (unten) und zurück zur Mittellinie.

Schritt 6: Punkte im skizzierten Bereich ablesen: Die Koordinaten des Hochpunkts (H), des Tiefpunkts (T) und der Wendepunkte (W, Schnittpunkte mit der Mittellinie) werden direkt aus der Skizze abgelesen.

Schritt 7: Punkte periodisch fortsetzen (Allgemeine Schreibweise): Extrema wiederholen sich nach einer **vollen** Periodenlänge T. Wendepunkte wiederholen sich bereits nach einer **halben** Periodenlänge $\frac{T}{2}$. Alle Punkte werden in der allgemeinen Form $P(x_0 + k \cdot \Delta x \mid y_0)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ angegeben.

Sehr kleinschrittiges Beispiel für die Tafel

Wir untersuchen die Funktion $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right) + 1$.

1. Verschiebungen bestimmen: Die Funktion ist um $d = 1$ nach rechts und um $c = 1$ nach oben verschoben. Die Mittellinie liegt bei $y = 1$.

2. Periodenlänge bestimmen:

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

3. Amplitude bestimmen:

$$A = |2| = 2$$

4. Rechteck zeichnen:

- x-Bereich: 1 bis $1 + 4 = 5$
- y-Bereich: $1 - 2 = -1$ bis $1 + 2 = 3$

Das Rechteck wird von $(1|-1)$ bis $(5|3)$ aufgespannt.

5. Graph skizzieren: Der Graph startet bei $(1|1)$, steigt zum Hochpunkt bei $(2|3)$, fällt durch den Wendepunkt $(3|1)$ zum Tiefpunkt bei $(4|-1)$ und endet bei $(5|1)$.

6. Punkte ablesen:

- Hochpunkt: $H(2 \mid 3)$
- Tiefpunkt: $T(4 \mid -1)$
- Wendepunkte: $W_1(1 \mid 1)$, $W_2(3 \mid 1)$, $W_3(5 \mid 1)$

7. Allgemeine Schreibweise (Periodisch fortsetzen): Extrema wiederholen sich alle $T = 4$ Einheiten. Wendepunkte wiederholen sich alle $\frac{T}{2} = 2$ Einheiten.

Alle Hochpunkte:

$$H(2 + 4k \mid 3) \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

Alle Tiefpunkte:

$$T(4 + 4k \mid -1) \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

Alle Wendepunkte:

$$W(1 + 2k \mid 1) \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

Einführung und curriculare Einordnung (Hessische KC-GOs)

Die Untersuchung trigonometrischer Funktionen ist ein zentraler Bestandteil des Analysis-Unterrichts in der Qualifikationsphase. Im **Hessischen Kerncurriculum für die gymnasiale Oberstufe (KCGO)** wird im Grund- und Leistungskurs (Q1) die Kompetenz gefordert, Eigenschaften periodischer Funktionen zu bestimmen und zu interpretieren.

Bevor die Differentialrechnung zur exakten Berechnung von Extrema und Wendepunkten eingeführt wird, fördert dieser Ansatz das funktionale Grundverständnis. Die Schüler erkennen die strukturellen Eigenschaften der Funktion (Periodizität, Amplitude, Verschiebung) und nutzen diese zur systematischen Bestimmung aller besonderen Punkte.

Die nachfolgenden Aufgaben sind in drei Niveaustufen gegliedert:

- **Niveau A:** direkte Anwendung des Algorithmus bei einfachen, unverschobenen oder einfach verschobenen Funktionen.
- **Niveau B:** komplexere Funktionen mit gebrochenen Periodenlängen und kombinierten Verschiebungen.
- **Niveau C:** Funktionen mit negativer Amplitude (Spiegelung) und Transferaufgaben zur allgemeinen Punktemenge.

Aufgaben

Niveau A (Grundlagen / Anforderungsbereich I)

a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sin(x)+2$. Bestimme die Periodenlänge, die Amplitude und die Mittellinie. Skizziere den Graphen im Bereich $x \in [0, 2\pi]$ und gib alle Hoch-, Tief- und Wendepunkte in diesem Bereich sowie in allgemeiner Schreibweise an.

b) Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3\sin(2x)-1$. Bestimme die Periodenlänge, die Amplitude und die Mittellinie. Skizziere den Graphen im Bereich einer vollen Periode ab $x = 0$ und gib alle besonderen Punkte in allgemeiner Schreibweise an.

c) **[Zusatz]** Gegeben ist $f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$. Bestimme alle Wendepunkte der Funktion in allgemeiner Schreibweise.

Niveau B (Transfer / Anforderungsbereich II)

a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}(x-2)\right) + 3$. Wende den vollständigen Algorithmus an. Skizziere den Graphen in einem vollen Periodenintervall und gib alle Extrema und Wendepunkte in allgemeiner Schreibweise an.

b) Gegeben ist die Funktion $f(x) = 1{,}5\sin(2(x+1)) - 0{,}5$. Bestimme die besonderen Punkte im skizzierten Bereich (Start bei $x = -1$) und formuliere die allgemeine Schreibweise für alle Hochpunkte und Wendepunkte.

c) **[Zusatz]** Bestimme alle x-Werte im Intervall $[0, 10]$, an denen die Funktion $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1$ einen Hochpunkt besitzt.

Niveau C (Vertiefung / Anforderungsbereich III)

a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = -2\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) + 1$. *Hinweis: Das negative Vorzeichen vor der Amplitude bewirkt eine Spiegelung an der Mittellinie. Der Graph startet auf der Mittellinie und fällt zunächst zum Tiefpunkt.* Skizziere den Graphen und gib alle besonderen Punkte in allgemeiner Schreibweise an.

b) **[Transfer]** Ein Federpendel schwingt um seine Ruhelage $y = 4$. Es erreicht maximal $y = 7$ und minimal $y = 1$. Eine vollständige Schwingung dauert 2 Sekunden. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das Pendel in der Ruhelage und bewegt sich nach oben. Stelle die Funktionsgleichung auf und gib alle Zeitpunkte $t \geq 0$ an, zu denen das Pendel einen maximalen Ausschlag nach oben (Hochpunkt) hat.

c) **[Zusatz]** Die Funktion $f(x) = a \cdot \sin(b(x - d)) + c$ hat die Mittellinie $y = 2$, die Amplitude 3 und die Periodenlänge $T = 6$. Der erste Hochpunkt liegt bei $H(2|5)$. Bestimme die Parameter a, b, c, d (mit $a > 0$ und $0 \leq d < T$) und gib die allgemeine Schreibweise aller Wendepunkte an.

Lösungen

Zu Niveau A

a) $f(x) = \sin(x) + 2$

- Mittellinie: $y = 2$, Amplitude: $A = 1$, Periodenlänge: $T = 2\pi$.
- Rechteck: $x \in [0, 2\pi]$, $y \in [1, 3]$.
- Punkte im Bereich: $H(\frac{\pi}{2} \mid 3)$, $T(\frac{3\pi}{2} \mid 1)$, $W_1(0 \mid 2)$, $W_2(\pi \mid 2)$, $W_3(2\pi \mid 2)$.
- Allgemeine Schreibweise:

$$H\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \;\middle|\; 3\right), \quad T\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k \;\middle|\; 1\right), \quad W(k\pi \mid 2) \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

b) $f(x) = 3\sin(2x) - 1$

- Mittellinie: $y = -1$, Amplitude: $A = 3$, Periodenlänge: $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.
- Rechteck: $x \in [0, \pi]$, $y \in [-4, 2]$.
- Punkte im Bereich: $H(\frac{\pi}{4} \mid 2)$, $T(\frac{3\pi}{4} \mid -4)$, $W_1(0 \mid -1)$, $W_2(\frac{\pi}{2} \mid -1)$, $W_3(\pi \mid -1)$.
- Allgemeine Schreibweise:

$$H\left(\frac{\pi}{4} + \pi k \;\middle|\; 2\right), \quad T\left(\frac{3\pi}{4} + \pi k \;\middle|\; -4\right), \quad W\left(\frac{\pi}{2}k \;\middle|\; -1\right) \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

c) [Zusatz] $f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$

- $T = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$. Wendepunkte wiederholen sich alle $\frac{T}{2} = 2\pi$.
- Start bei $x = 0$. Allgemeine Schreibweise der Wendepunkte:

$$W(2\pi k \mid 1) \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

Zu Niveau B

a) $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}(x - 2)\right) + 3$

- Verschiebungen: $d = 2, c = 3 \Rightarrow$ Mittellinie $y = 3$.
- $T = \frac{2\pi}{\pi/4} = 8$. Amplitude $A = 2$.
- Rechteck: $x \in [2, 10]$, $y \in [1, 5]$.
- Punkte im Bereich: $H(4 \mid 5)$, $T(8 \mid 1)$, $W_1(2 \mid 3)$, $W_2(6 \mid 3)$, $W_3(10 \mid 3)$.

- Allgemeine Schreibweise:

$$H(4+8k \mid 5), \quad T(8+8k \mid 1), \quad W(2+4k \mid 3) \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

b) $f(x) = 1{,}5\sin(2(x+1)) - 0{,}5$

- Verschiebungen: $d = -1, c = -0{,}5 \Rightarrow$ Mittellinie $y = -0{,}5$.
- $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Amplitude $A = 1{,}5$.
- Rechteck: $x \in [-1, -1+\pi]$, $y \in [-2, 1]$.
- Punkte im Bereich: $H(-1+\frac{\pi}{4} \mid 1)$, $T(-1+\frac{3\pi}{4} \mid -2)$.
- Allgemeine Schreibweise:

$$H\left(-1+\frac{\pi}{4}+\pi k \;\middle|\; 1\right), \quad W\left(-1+\frac{\pi}{2}k \;\middle|\; -0{,}5\right) \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

c) [Zusatz] $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1$

- $T = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4$. Hochpunkte wiederholen sich alle 4 Einheiten.
- Erster Hochpunkt bei $x = \frac{T}{4} = 1$, also $H(1|3)$.
- Hochpunkte im Intervall $[0, 10]$: $H(1|3)$, $H(5|3)$, $H(9|3)$.

Zu Niveau C

a) $f(x) = -2\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) + 1$

- Mittellinie $y = 1$, $A = 2$, $T = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6$.
- Wegen des negativen Vorzeichens startet der Graph bei $(0|1)$ und fällt zum Tiefpunkt.
- Rechteck: $x \in [0, 6]$, $y \in [-1, 3]$.
- Punkte im Bereich: $T(1{,}5 \mid -1)$, $H(4{,}5 \mid 3)$, $W_1(0 \mid 1)$, $W_2(3 \mid 1)$, $W_3(6 \mid 1)$.
- Allgemeine Schreibweise:

$$T(1{,}5+6k \mid -1), \quad H(4{,}5+6k \mid 3), \quad W(3k \mid 1) \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

b) [Transfer] Federpendel

- Ruhelage (Mittellinie): $c = 4$. Maximaler Ausschlag: $A = 7 - 4 = 3$.
- Periodenlänge: $T = 2$. Faktor $b = \frac{2\pi}{2} = \pi$.
- Start in Ruhelage nach oben $\Rightarrow$ normale Sinusfunktion ohne x-Verschiebung ($d = 0$).

- Funktionsgleichung: $f(t) = 3\sin(\pi t) + 4$.
- Hochpunkte (maximaler Ausschlag nach oben): $y = 7$. Wiederholung alle $T = 2$.
- Erster Hochpunkt bei $t = \frac{T}{4} = 0{,}5$.
- Alle Zeitpunkte: $t = 0{,}5 + 2k$ mit $k \in_0$ (also $t \in \{0{,}5; 2{,}5; 4{,}5; \dots\}$).

c) [Zusatz] Parameterbestimmung

- Mittellinie $c = 2$, Amplitude $a = 3$ (da $a > 0$).
- Periodenlänge $T = 6 \Rightarrow b = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.
- Der erste Hochpunkt einer normalen Sinusfunktion liegt bei $\frac{1}{4}T$ nach dem Start. Da der Hochpunkt bei $x = 2$ liegt, muss der Startpunkt (und damit die x-Verschiebung) bei $d = 2 - \frac{6}{4} = 0{,}5$ liegen.
- Funktionsgleichung: $f(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{3}(x - 0{,}5)\right) + 2$.
- Wendepunkte wiederholen sich alle $\frac{T}{2} = 3$. Start bei $x = 0{,}5$.
- Allgemeine Schreibweise der Wendepunkte:

$$W(0{,}5 + 3k \mid 2) \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

Didaktische Hinweise zur KCGO-Einordnung und Abiturvorbereitung

- **KCGO-Bezug:** Die Aufgaben decken den Inhaltsbereich „Analysis“ ab. Insbesondere wird die Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“ gestärkt, indem Parameter von Funktionen geometrisch interpretiert und zur Bestimmung von Eigenschaften genutzt werden.
- **Vorbereitung auf die Differentialrechnung:** Durch das intuitive Ablesen und die Nutzung der Periodizität wird ein solides Grundverständnis geschaffen. In der folgenden Unterrichtseinheit kann die Differentialrechnung dann als formaler Beweis und zur Behandlung nicht-periodischer oder komplexerer Funktionen eingeführt werden.
- **Allgemeine Schreibweise:** Die Formulierung mit $k \in \mathbb{Z}$ (oder $a \in \mathbb{Z}$) trainiert die Abstraktionskompetenz und ist essenziell für das Lösen trigonometrischer Gleichungen im Abitur.
- **Differenzierung:** Die Niveaustufen A bis C ermöglichen eine natürliche Differenzierung. Niveau C fordert insbesondere das Umkehren des Algorithmus (Aufgabe c) sowie die Modellierung eines Sachzusammenhangs (Aufgabe b).

- **Umgang mit dem Taschenrechner/CAS:** In der Q1 sollte der Fokus auf dem analytischen und grafischen Verständnis liegen. Ein CAS kann zur Kontrolle der Skizzen und zur Überprüfung der allgemeinen Punktmengen eingesetzt werden, ersetzt aber nicht das manuelle Aufstellen der Terme.