Arbeitsblatt: Über- und unterbestimmte LGS

Kurze Wiederholung & Beispiele

Beispiel: Überbestimmt (Mehr Gleichungen als Variablen)

Aufgabe:

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad & x + y = 5 \\ \text{II:} \quad & x - y = 1 \\ \text{III:} \quad & 2x + y = 10 \end{aligned}$$

Lösung: Aus I und II folgt $x = 3, y = 2$.
Probe mit III: $2(3) + 2 = 8 \neq 10$. **Widerspruch!** $\Rightarrow L = \{\}$.
(Wäre III z.B. $2x + y = 8$ *gewesen, wäre die Gleichung nur überflüssig und* $L = \{(3|2)\}$*.)*

Beispiel: Unterbestimmt (Weniger Gleichungen als Variablen)

Aufgabe:

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad & x + y + z = 10 \\ \text{II:} \quad & y + z = 4 \end{aligned}$$

Lösung: Wir ersetzen eine Variable durch den Parameter t. Setze $z = t$.
Aus II folgt: $y + t = 4 \Rightarrow y = 4 - t$.
Einsetzen in I: $x + (4 - t) + t = 10 \Rightarrow x + 4 = 10 \Rightarrow x = 6$.
$\Rightarrow L = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 4 - t \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$

Übungsaufgaben

Wähle Aufgaben, die zu deinem Können passen. Versuche mindestens eine Aufgabe aus jedem Niveau!

Niveau A (Basis)

Aufgabe 1 (Überbestimmt): Untersuche das LGS auf Lösbarkeit.

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad & x + y = 4 \\ \text{II:} \quad & x - y = 2 \\ \text{III:} \quad & 2x + y = 7 \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Unterbestimmt): Bestimme die Lösungsmenge.

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad & x + y + z = 5 \\ \text{II:} \quad & y + z = 2 \end{aligned}$$

Niveau B (Standard)

Aufgabe 3 (Überbestimmt mit Lösung): Untersuche das LGS auf Lösbarkeit.

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad & 2x + y = 5 \\ \text{II:} \quad & x - y = 1 \\ \text{III:} \quad & 3x = 6 \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Unterbestimmt): Bestimme die Lösungsmenge.

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad & 2x + y - z = 4 \\ \text{II:} \quad & y - z = 2 \end{aligned}$$

Niveau C (Experte / Transfer)

Aufgabe 5 (Parameter k): Gegeben ist das überbestimmte LGS:

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad & x + y = 3 \\ \text{II:} \quad & 2x - y = 0 \\ \text{III:} \quad & x + 2y = k \end{aligned}$$

Für welchen Wert von k ist das LGS lösbar? Wie lautet dann die Lösung? Was passiert, wenn k einen anderen Wert hat?

Lösungen

Aufgabe 1: I + II $\Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$. Einsetzen in I $\Rightarrow 3 + y = 4 \Rightarrow y = 1$.
Probe mit III: $2(3) + 1 = 7$. Stimmt exakt!
$\Rightarrow$ Die 3. Gleichung ist überflüssig. **Lösung:** $L = \{(3 \mid 1)\}$.

Aufgabe 2: Setze $z = t$. Aus II folgt $y = 2 - t$.
Einsetzen in I: $x + (2 - t) + t = 5 \Rightarrow x + 2 = 5 \Rightarrow x = 3$.
$\Rightarrow$ **Lösung:** $L = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 - t \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$

Aufgabe 3: I + II $\Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$. Einsetzen in II $\Rightarrow 2 - y = 1 \Rightarrow y = 1$.
Probe mit III: $3(2) = 6$. Stimmt!
$\Rightarrow$ **Lösung:** $L = \{(2 \mid 1)\}$.

Aufgabe 4: Setze $z = t$. Aus II folgt $y = 2 + t$.
Einsetzen in I: $2x + (2 + t) - t = 4 \Rightarrow 2x + 2 = 4 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$.
$\Rightarrow$ **Lösung:** $L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 + t \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$

Aufgabe 5: I + II $\Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$. Einsetzen in II $\Rightarrow 2 - y = 0 \Rightarrow y = 2$.
Probe mit III: $1 + 2(2) = k \Rightarrow 5 = k$.
$\Rightarrow$ Das LGS ist nur für $k = 5$ lösbar. Die Lösung ist dann $L = \{(1 \mid 2)\}$.
$\Rightarrow$ Für alle $k \neq 5$ ergibt die Probe einen Widerspruch, es gibt **keine Lösung** ($L = \{\}$).

Einordnung in den Lehrplan (für die Lehrkraft)

Thema: Analytische Geometrie / Lineare Algebra (Qualifikationsphase / E-Phase je nach Bundesland).
Kompetenzbereiche:

- **K1 (Mathematisch argumentieren):** Fallunterscheidungen bei der Lösbarkeit von LGS begründen (Widerspruch vs. Redundanz vs. Parameter).
- **K2 (Probleme mathematisch lösen):** Algorithmen (Gauß-Verfahren / Einsetzungsverfahren) zielgerichtet auf nicht-standardisierte LGS anwenden.
- **K6 (Mathematisch modellieren):** Übertragung geometrischer Situationen (Lage von Ebenen im Raum: parallel, identisch, Schnittgerade) in algebraische Strukturen (LGS).

Didaktischer Hinweis: Dieses Arbeitsblatt verzichtet bewusst auf die abstrakte Matrix-Schreibweise und den Begriff des "Rangs", um im Grundkurs den Fokus auf die inhaltliche Bedeutung der Gleichungen und die geometrische Interpretation zu legen.